УДК 519.86

МОДЕЛІ ПОДІЛУ РИНКУ НА ТОРГОВІ ЗОНИ В НЕЧІТКИХ УМОВАХ

Л. Г. Тарасова

Канд. фіз-мат. наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання

Державний вищий навчальний заклад «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»
проспект Перемоги, 54/1, м. Київ, 03680, Україна
tarasowa777@yandex.ru

О. В. Піскунова

Д-р екон. наук, професор,
професор кафедри економіко-математичного моделювання

Державний вищий навчальний заклад «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»
проспект Перемоги, 54/1, м. Київ, 03680, Україна
episkunova@rambler.ru

Конкурентна боротьба за ринок збуту привела до виникнення проблеми поділу ринку на торгові зони та появи численних моделей торгових зон. Класичні моделі, які одержали назву «моделі просторової взаємодії», описують поділ на торгові зони в чітких умовах. Для побудови моделей, більш адекватних умовам сучасної економіки, доцільно використовувати теорію нечітких множин.

У статті запропоновано новий підхід до поділу ринку на торгові зони в нечітких умовах на підґрунті застосування відстані Хеммінга, який враховує економічний зміст задачі та усуває некоректності класичного підходу, основаного на композиції бінарних відношень. Введено нові поняття, такі як відстань Хеммінга з додатнім відхиленням для нечіткої множини та відстань Хеммінга з від'ємним відхиленням для нечіткої множини. Запропоновано методологію визначення порогу поділу, а також розширення поняття розв'язку задачі поділу на торгові зони. Запропоновано не тільки виділяти торгові зони, а й досліджувати первинні, вторинні, третинні торгові зони як ступінь належності до потенційного споживача, використовуючи значення функцій належності. Результати розв'язання прикладної задачі за допомогою запропонованого нами підходу є логічними і не суперечливими реальним процесам в економіці.

Ключові слова. *Модель поділу, торгові зони, композиція бінарних відношень, відстань Хеммінга для нечіткої множини, відстань Хеммінга з додатнім відхиленням для нечіткої множини, відстань Хеммінга з від'ємним відхиленням для нечіткої множини, нечіткий кластер, поріг поділу.*

МОДЕЛИ РАЗДЕЛЕНИЯ РЫНКА НА ТОРГОВЫЕ ЗОНЫ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ

Л. Г. Тарасова

Канд. физ.-мат. наук, доцент,
доцент кафедры экономико-математического моделирования

Государственное высшее учебное заведение «Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана»
проспект Победы, 54/1, г. Киев, 03680, Украина
tarasowa777@yandex.ru

Е. В. Пискунова

Д-р экон. наук, профессор,
профессор кафедры экономико-математического моделирования

Государственное высшее учебное заведение «Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана»
проспект Победы, 54/1, г. Киев, 03680, Украина
episkunova@rambler.ru

Конкурентная борьба за рынок сбыта привела к возникновению проблемы разделения рынка на торговые зоны и появления многочисленных моделей торговых зон. Классические модели, которые получили название «модели пространственного взаимодействия», описывают разделение на торговые зоны в четких условиях. Для построения моделей, более адекватных условиям современной экономики, целесообразно использовать теорию нечетких множеств.

В статье предложен новый подход к разделению рынка на торговые зоны в нечетких условиях на основе использования расстояния Хемминга, который учитывает экономический смысл задачи и устраняет некорректности классического подхода, основанного на композиции бинарных отношений. Введены новые понятия, такие как расстояние Хемминга с положительным отклонением для нечеткого множества и расстояние Хемминга с отрицательным отклонением для нечеткого множества. Предложена методология определения порога разделения, а также расширено понятие решения задачи разделения на торговые зоны. Предложено не только выделять торговые зоны, но и исследовать первичные, вторичные, третичные торговые зоны как степень принадлежности к потенциальному потребителю, используя значения функций принадлежности. Результаты решения прикладной задачи с помощью предложенного нами подхода являются логичными и не противоречивыми реальным процессам в экономике.

Ключевые слова. *Модель разделения, торговые зоны, композиция бинарных отношений, расстояние Хемминга для нечеткого*

множества, расстояние Хемминга с положительным отклонением для нечеткого множества, расстояние Хемминга с отрицательным отклонением для нечеткого множества, нечеткий кластер, порог разделения.

MODELS OF MARKET DIVISION INTO TRADE AREAS IN THE FUZZY CONDITIONS

Liudmyla Tarasova

PhD (Physics and Mathematical Sciences), Docent,
Associate Professor of Department of Economic and Mathematical Modeling

State Higher Educational Establishment

«Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman»
54/1 Peremogy Avenue, Kyiv, 03680, Ukraine
tarasowa777@yandex.ru

Olena Piskunova

DSc (Economic Sciences)
Professor of Department of Economic and Mathematical Modeling

State Higher Educational Establishment

«Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman»
54/1 Peremogy Avenue, Kyiv, 03680, Ukraine
episkunova@rambler.ru

Competition for market led to the problem of market division into trade areas and the appearance of numerous models of trade areas. Classical models, which are called as "models of spatial interaction", describe the market division into trade areas in precise conditions. To build more adequate models to modern economy it’s appropriate to use the theory of fuzzy sets.
It is proposed in the article a new approach to market division into trade areas in fuzzy conditions with usage of Hamming distance, which takes into account the economic sense of the problem and eliminates the incorrectness of classical approach, based on the composition of binary relations. It’s introduced the new concepts such as the Hamming distance with positive deviation for fuzzy set and the Hamming distance with negative deviation for fuzzy set. There is developed in the article the methodology of determining the threshold of separation and proposed the expansion of the concept of solving the problem of market division into trade areas. So, it’s proposed not only to allocate the trade areas, but also research primary, secondary and tertiary trade zones as the degree of belonging to a potential

customer using the values of the membership functions. The results of solving of applied problem under our approach is logical and not contradictory to real processes in the economy.

Keywords. *Model of division, trade areas, the composition of binary relations, the Hamming distance for fuzzy set, the Hamming distance with positive deviation for fuzzy set, the Hamming distance with negative deviation for fuzzy set, fuzzy cluster, the threshold of division.*

JEL Classification: C69, D11, F17.

Постановка проблеми

Конкурентна боротьба за ринок збуту, яка постійно посилюється, привела до виникнення проблеми поділу ринку на торгові зони компаній. На думку Апплебаума У. і Кохена С. Б. [1], «правильна ідентифікація торгової зони торгового центру винятково важлива для здійснення розумних вкладень у вдосконалення діяльності торгового центру, управління асортиментом, здійснення заходів щодо продажу товарів, залучення та обслуговування клієнтів». Про актуальність проблеми свідчить той факт, що за дослідження у цій галузі МакФадден Д. у 2000 році був нагороджений Нобелевською премією з економіки.

Аналіз існуючих підходів і досліджень

За роки після виходу першої публікації Феттера Ф.А. [2] з досліджуваної проблеми були побудовані різноманітні моделі торгових зон — від найпростіших до більш складних, причому ускладнення мало на меті якомога адекватніше наближення до реальних ситуацій.

Аналіз моделей торгових зон [3], які сьогодні найбільш часто застосовуються, дозволяє виділити географічні моделі, направлені на формалізацію процедури зображення торгових зон на мапі міста, а також ймовірнісні моделі, які використовують ймовірності поведінки споживачів. Найбільш відомими є такі моделі:

- модель «центральної точки» (Central Place Theory, CPT) [4,5], яка була розроблена на замовлення уряду Німеччини для пояснення переміщень споживачів за товарами між населеними пунктами;
- модель роздрібної гравітації Рейлі [6], відома як «Закон роздрібної гравітації Рейлі» (Reilly’s Law of Retail Gravitation), а та-

кож модифікація цього підходу (New Laws of Retail Gravitation), розроблена Конверс П.Д. [7];

- модель просторової взаємодії Бетті [8];
- аксіома поведінки споживача Льюса [9];
- модель Хаффа [10], яка була застосована для визначення оптимального місця розміщення нового магазину роздрібної торгівлі в місті Мадриді (Іспанія) [11];
- модель мультиплікативного інтерактивного вибору Наканіші-Купера (Multiplicative Interactive Choice, MCI) [12], яку було використано для оцінки ймовірності відвідування супермаркетів мешканцями різних районів міста; порівняльне дослідження було проведено для двох європейських міст: Барселони (Іспанія) і Мілтон Крейс (Англія) [13];
- поліноміальна логістична модель МакФаддена (Multinominal Logit Model, MLM) [14], яка була побудована для аналізу переваг споживачів продуктових магазинів міста Саламанка (Іспанія) [15];
- модель конкуруючих напрямків Фотерінгема (Competing Destinations Model, CDM) [16] була застосована для дослідження ринку роздрібної торгівлі продуктами японського міста Кусатсу [17];
- модель Раста и Донту [18].

Вищенаведені класичні моделі, які одержали назву «моделі просторової взаємодії» (spatial interaction models), описують поділ на торговельні зони на основі ідеалізованої інформації і низки припущень. Проте на практиці інформація, яка використовується для побудови моделей, за своєю природою неповна, неточна, а тому для побудови більш адекватної моделі доцільно розглянути задачу поділу ринку на торгові зони в нечітких умовах, використовуючи теорію нечітких множин.

Теорія нечітких множин застосовувалась для аналізу просторової економічної активності, наприклад у роботах [19, 20], але в них не розглядалось питання поділу на торгові зони.

На сьогоднішній день дуже популярною роботою, яка присвячена побудові моделей поділу ринку на торгові зони в нечітких умовах є робота Леунга Й. [21], на яку посилаються і використовують у своїх дослідженнях багато науковців, зокрема [22—24]. Модель Леунга базується на використанні композиції бінарних відношень. Проте застосування вказаного підходу до вирішення прикладної економічної задачі призводить до економічно суперечливих висновків.

Метою нашої роботи є аналіз можливості застосування композиції бінарних відношень в моделі поділу ринку на торгові зони в нечітких умовах, яка представлена у праці [21], а також розробка нового підходу, який дозволив би позбутись суперечностей у результатах роботи базової моделі.

Дослідження моделі поділу ринку на торгові зони на підґрунті класичного підходу із застосуванням композиції бінарних відношень

Розглянемо модель поділу торгових зон між компаніями та її дослідження, запропоновані у праці Леунга Й. [21].

Економічна постановка задачі.

Розглядається ринок, який складається із деякої сукупності компаній, що характеризуються певним набором ознак, і є сукупність споживачів, які мають різне ставлення до цих ознак. Необхідно ринок поділити на торгові зони, тобто для кожної фірми визначити сукупність потенційних споживачів, які надають їй перевагу.

Математична постановка задачі.

Модель передбачає, зокрема, такі припущення:

- існування ринку;
- фірми характеризуються s ознаками;
- ступінь оцінки ознак при прийнятті рішення визначається індивідом (споживачем);
- перевага однієї фірми над іншою визначається близькістю ступеню оцінки ознак індивідуума до ступеню оцінки ознак для фірми.

Нехай $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — множина споживачів, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ — множина ознак, за якими оцінюється фірма, і $Z=(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — множина фірм.

Нехай $\gamma_{\underset{\sim}{R_1}} : X \times Y \to [0, 1]$ — функція належності нечіткого бінарного відношення $\underset{\sim}{R_1}$, де $\gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x, y)$ означає ступінь важливості ознаки y $(y \in Y)$ за оцінкою індивіда x $(x \in X)$ при визначенні ним переваг компаній. Це відношення можна подати в матричній формі:

$$\underset{\sim}{R_1} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \dots & y_s \\ \left\| \begin{array}{cccc} \gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x_1, y_1) & \gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x_1, y_2) & \dots & \gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x_1, y_s) \\ \gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x_2, y_1) & \gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x_2, y_2) & \dots & \gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x_2, y_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x_n, y_1) & \gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x_n, y_2) & \dots & \gamma_{\underset{\sim}{R_1}}(x_n, y_s) \end{array} \right\| \end{array}. \qquad (1)$$

Нехай $\chi_{\underset{\sim}{R_2}} : Y \times Z \to [0, 1]$ — функція належності нечіткого бінарного відношення $\underset{\sim}{R_2}$. При цьому для всіх $y \in Y$, $z \in Z$ $\chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y, z)$ означає ступінь належності або сумісності фірми z з ознакою y. У матричній формі це відношення має вигляд:

$$\underset{\sim}{R_2} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{array} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \dots & z_m \\ \left\| \begin{array}{cccc} \chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y_1, z_1) & \chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y_1, z_2) & \dots & \chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y_1, z_m) \\ \chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y_2, z_1) & \chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y_2, z_2) & \dots & \chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y_2, z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y_s, z_1) & \chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y_s, z_2) & \dots & \chi_{\underset{\sim}{R_2}}(y_s, z_m) \end{array} \right\| \end{array}. \qquad (2)$$

Необхідно для кожної компанії z_j визначити торгові зони M_j, $j = \overline{1, m}$, які описуються множинами споживачів x_i, $i = \overline{1, n}$, рівень сприйняття компанії z_j якими перевищує деяке критичне значення (поріг поділу) k:

$$M_j = \left\{ x_i \mid \mu_{\underset{\sim}{A_j}}(x_i, z_j) \geq k, \quad x_i \in X \right\}, \ i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m}, \qquad (3)$$

де k — поріг поділу; $\mu_{\underset{\sim}{A_j}}(x_i, z_j)$ — функція належності нечіткої множини $\underset{\sim}{A_j}$, яка описує відповідне сприйняття фірми z_j споживачем x_i.

Для вирішення цієї задачі у праці [21], виходячи із заданих матриць бінарних відношень $\underset{\sim}{R}_1$ (переваги ознак фірми для споживача) і $\underset{\sim}{R}_2$ (сумісність фірми з розглядуваними ознаками), спочатку знаходяться нечіткі множини $\underset{\sim}{A}_1$, $\underset{\sim}{A}_2$, …, $\underset{\sim}{A}_m$. Для цього використовується композиція бінарних відношень $\underset{\sim}{R}_1$ і $\underset{\sim}{R}_2$:

$$\underset{\sim}{R}_3 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \dots & z_m \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_1, z_1) & \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_1, z_2) & \dots & \mu_{\underset{\sim}{A}_m}(x_1, z_m) \\ \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_2, z_1) & \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_2, z_2) & \dots & \mu_{\underset{\sim}{A}_m}(x_2, z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_n, z_1) & \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_n, z_2) & \dots & \mu_{\underset{\sim}{A}_m}(x_n, z_m) \end{array} \right\| \end{array} \tag{4}$$

Її елементи визначаються функцією належності:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_j}(x_i, z_j) = \frac{\sum\limits_l \gamma_{\underset{\sim}{R}_1}(x_i, y_l) \cdot \chi_{\underset{\sim}{R}_2}(y_l, z_j)}{\sum\limits_l \gamma_{\underset{\sim}{R}_1}(x_i, y_l)}, \tag{5}$$
$$i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ l = \overline{1,s},\ x_i \in X,\ z_j \in Z,\ y_l \in Y.$$

Функції належності $\mu_{\underset{\sim}{A}_j}(x_i, z_j)$ являють собою зважений ступінь переваги щодо фірми z_j з боку споживача x_i і описують нечіткі множини $\underset{\sim}{A}_j$ переваг фірм z_j, $j = \overline{1, m}$.

У подальшому дослідженні, проведеному Леунгом Й. [21], аналізуються функції належності та нечіткі множини переваг для визначення найбільш раціонального способу, за яким ринок можна поділити між фірмами. Леунгом Й. стверджується, що функції переваги, описувані співвідношенням (5), мають такі властивості:

$$\mu_{\underset{\sim}{A_j}}\left(\lambda\cdot(x_1,z_j)+(1-\lambda)\cdot(x_2,z_j)\right)\geq \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A_j}}(x_1,z_j),\mu_{\underset{\sim}{A_j}}(x_2,z_j)\right),$$
$$x_1,x_2\in X,\ z_j\in Z,\lambda\in[0,1],\ j=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Це означає, що вони є опуклими, а тому переріз їх також буде опуклою функцією.

Для поділу на торгові зони Леунгом Й. використовується поріг поділу k, який визначається з умови:

$$k<\min_{j,r}\max_i\left(\mu_{\underset{\sim}{A_j}}(x_i,z_j)\wedge\mu_{\underset{\sim}{A_r}}(x_i,z_r)\right)=$$
$$=\min_{j,r}\max_i\min\left(\mu_{\underset{\sim}{A_j}}(x_i,z_j),\mu_{\underset{\sim}{A_r}}(x_i,z_r)\right) \tag{7}$$

Далі для знаходження значення k будується матриця [21]:

$$W=\left\|\begin{matrix}\mu_{\underset{\sim}{A_1}}(x_1,z_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{A_2}}(x_1,z_2) & \dots & \mu_{\underset{\sim}{A_{m-1}}}(x_1,z_{m-1})\wedge\mu_{\underset{\sim}{A_m}}(x_1,z_m)\\ \mu_{\underset{\sim}{A_1}}(x_2,z_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{A_2}}(x_2,z_2) & \dots & \mu_{\underset{\sim}{A_{m-1}}}(x_2,z_{m-1})\wedge\mu_{\underset{\sim}{A_m}}(x_2,z_m)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \mu_{\underset{\sim}{A_1}}(x_n,z_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{A_2}}(x_n,z_2) & \dots & \mu_{\underset{\sim}{A_{m-1}}}(x_n,z_{m-1})\wedge\mu_{\underset{\sim}{A_m}}(x_n,z_m)\end{matrix}\right\|.$$

Після цього торгові зони M_j, $j=\overline{1,m}$, визначаються множинами (3) рівня k.

Зауважимо, що знаходження порогу поділу k для дискретного випадку у такий спосіб є некоректним, так як некоректно вводиться і використовується поняття опуклої дискретної множини (6). Справа у тому, що описаний у праці [21] підхід щодо визначення торгових зон та, зокрема, порогу поділу k, є спробою узагальнення одновимірного випадку, коли розглядається лише одна ознака — важкість подолання шляху до фірми, і тому x — це число, яке відповідає відстані від споживача до фірми. Проте у розглядуваному багатовимірному випадку x_i — це вже не число, а i-ий споживач з множиною властивих йому характеристик. Тому здійснення відповідних математичних операцій, які базуються саме на виконані припущення (6) (побудова матриці W, визначення порогу поділу, а також визначення самих торгових зон) у загальному випадку викликає сумніви.

У праці [21] розглянуто також застосування вищенаведеного підходу для розв'язку такої прикладної задачі.

Нехай $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})$ — множина споживачів; $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ — множина фірм; $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ — множина ознак, які використовуються для оцінювання фірми: y_1 — доступність; y_2 — висока якість; y_3 — високий рівень обслуговування; y_4 — низька ціна.

Нехай матриця $\underset{\sim}{R_1}$ нечіткого бінарного відношення (1) має вигляд

$$\underset{\sim}{R_1} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array} . \qquad (8)$$

Елементи цієї матриці виражають ступінь важливості ознак фірми для споживачів: чим більше значення, тим важливіша ознака.

Нехай нечітке бінарне відношення $\underset{\sim}{R_2}$ (2) подається матрицею

$$\underset{\sim}{R_2} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{array} \right\| \end{array}, \tag{9}$$

елементи якої означають ступінь сумісності фірми z_j з ознакою y_l, $j=\overline{1,\ 4}$; $l=\overline{1,\ 4}$. Так, зокрема, фірма z_1 характеризується високою доступністю (до неї легко дістатись), низькими цінами, але нижчим за середній рівнем обслуговуванням і середньою якістю товару. Фірма z_2 характеризується дуже високими якістю продукції і рівнем обслуговування, але є важкодоступною і з високими цінами. Зазначимо, що значення елементів матриць $\underset{\sim}{R_1}$ і $\underset{\sim}{R_2}$ та їх економічну інтерпретацію взято із праці Леунга Й. [21, с. 346].

Реалізацією вище описаного підходу для визначення торгових зон M_j, відповідних фірм z_j, $j=\overline{1,\ 4}$, є здійснення наступних дій.

Використовуючи формулу (5), знаходять елементи $\underset{\sim}{R_3}$ (4) композиції нечітких бінарних відношень $\underset{\sim}{R_1}$ і $\underset{\sim}{R_2}$:

$$\underset{\sim}{R_3} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}65 & 0{,}5 & 0{,}525 & 0{,}575 \\ 0{,}708 & 0{,}377 & 0{,}55 & 0{,}592 \\ 0{,}718 & 0{,}355 & 0{,}514 & 0{,}595 \\ 0{,}578 & 0{,}657 & 0{,}535 & 0{,}552 \\ 0{,}65 & 0{,}5 & 0{,}525 & 0{,}575 \\ 0{,}619 & 0{,}562 & 0{,}527 & 0{,}562 \\ 0{,}65 & 0{,}5 & 0{,}525 & 0{,}575 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array} \right\| \end{array}. \tag{10}$$

Використовуючи матрицю $\underset{\sim}{R_3}$ знаходять матрицю *W*:

$$W = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}525 & 0{,}575 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}525 \\ 0{,}377 & 0{,}515 & 0{,}592 & 0{,}377 & 0{,}377 & 0{,}515 \\ 0{,}355 & 0{,}514 & 0{,}595 & 0{,}355 & 0{,}355 & 0{,}514 \\ 0{,}578 & 0{,}535 & 0{,}552 & 0{,}535 & 0{,}552 & 0{,}535 \\ 0{,}5 & 0{,}525 & 0{,}575 & 0{,}575 & 0{,}5 & 0{,}525 \\ 0{,}562 & 0{,}527 & 0{,}562 & 0{,}527 & 0{,}562 & 0{,}527 \\ 0{,}5 & 0{,}525 & 0{,}575 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}525 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись матрицею *W* для поділу на торгові зони, визначають поріг поділу *k* за формулою (7). Маємо:

$$\max_i \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A_1}}(x_i,\ z_1),\quad \mu_{\underset{\sim}{A_2}}(x_i,\ z_2) \right) = 0{,}578;$$

$$\max_i \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A_1}}(x_i,\ z_1),\quad \mu_{\underset{\sim}{A_3}}(x_i,\ z_3) \right) = 0{,}535;$$

$$\max_i \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A_1}}(x_i,\ z_1),\quad \mu_{\underset{\sim}{A_4}}(x_i,\ z_4) \right) = 0{,}7;$$

$$\max_i \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A_2}}(x_i,\ z_2),\quad \mu_{\underset{\sim}{A_3}}(x_i,\ z_3) \right) = 0{,}6;$$

$$\max_i \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A_2}}(x_i,\ z_2),\quad \mu_{\underset{\sim}{A_4}}(x_i,\ z_4) \right) = 0{,}6;$$

$$\max_i \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A_3}}(x_i,\ z_3),\quad \mu_{\underset{\sim}{A_4}}(x_i,\ z_4) \right) = 0{,}6.$$

Мінімальне значення з усіх знайдених буде

$$\min_{j,\, r}(0{,}578;\ 0{,}535;\ 0{,}7;\ 0{,}6;\ 0{,}6;\ 0{,}6) = 0{,}535.$$

Тепер із матриці $\underset{\sim}{R_3}$ вибирають для k найбільш можливе значення, яке було б меншим від 0,535, що забезпечить перетин торгових зон, і дістають k = 0,527. Застосовуючи це значення як поріг поділу, на основі матриці $\underset{\sim}{R_3}$ знаходяться наступні торгові зони (тобто відбираються ті споживачі, яким відповідають елементи матриці, що перевищують 0,527):

$$M_1 = \left(x_1,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12}\right),$$
$$M_2 = (x_2,\ x_3,\ x_8,\ x_{10}),$$
$$M_3 = (x_2,\ x_8,\ x_{10}),$$
$$M_4 = (x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11}).$$

Проаналізуємо одержані вище результати розв'язання прикладної задачі з економічної точки зору, а також теоретичні аспекти використання відповідних операцій.

Елементи матриці $\underset{\sim}{R_1}$ виражають ступінь оцінки ознак торгових компаній споживачами (чим більше значення, тим вища оцінка ознаки). Наприклад, у нашому випадку (див. матрицю (8)) маємо, що споживач x_5 при прийнятті рішення використовує всі ознаки, які за оцінкою однакові і мають найбільшу ступінь — 1, а це означає, що при аналізі компаній він висуває максимальні вимоги за всіма її характеристиками. Споживач x_9 при прийнятті рішення використовує всі ознаки, які за його оцінкою також однакові, але із середнім ступенем — 0,5, а це означає, що при аналізі фірм він висуває середні вимоги за всіма її характеристиками. Споживач x_{11} при виборі фірми використовує також всі ознаки з однаковим дуже низьким ступенем — 0,1, а це означає, що йому майже байдуже, яким властивостям відповідає фірма.

Розглянемо тепер отримані результати і проаналізуємо матрицю $\underset{\sim}{R}_3$ (10), елементи якої означають зважену ступінь переваги кожної торгової компанії відповідним споживачем. Ми бачимо, що для згаданих вище споживачів x_5, x_9, x_{11} зважені ступені переваг фірм z_1, z_2, z_3, z_4 відповідно дорівнюють 0,65, 0,5, 0,525, 0,575. Тобто вони однакові, що суперечить логіці дослідження. Адже, наприклад, споживач x_{11}, який при виборі фірми використовує всі ознаки з дуже маленьким ступенем — 0,1 (тобто йому майже байдуже, яким властивостям відповідає фірма), повинен належати всім торговим зонам кожної з фірм. А за результатами поділу на зони за класичним підходом Леунга ми бачимо, що він належить тільки торговим зонам M_1 і M_4, що суперечить економічній логіці.

На наш погляд, причина суперечності результатів розподілу споживачів за торговими зонами згідно підходу Леунга полягає у використанні формули (5) для розрахунку матриці $\underset{\sim}{R}_3$ (10). Проаналізуємо цю формулу. Вона являє собою композицію нечітких відношень $\underset{\sim}{R}_1$ і $\underset{\sim}{R}_2$. Проте, в теорії нечітких множин існують інші види композицій нечітких відношень, які можна було б також використати як інструментарій для розв’язання поставленої задачі. Наведемо деякі з них і проаналізуємо їх переваги та недоліки з огляду на задачу дослідження.

Нехай задано два відношення $\underset{\sim}{R}_1 \subset X \times Y$ і $\underset{\sim}{R}_2 \subset Y \times Z$. Тоді:

а) max-min композицією відношень $\underset{\sim}{R}_1$ і $\underset{\sim}{R}_2$ називається відношення $\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2$, функція належності якого визначається так:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2}(x, z) = \bigvee_y \left(\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(y, z) \right) = \max_y \left(\min \left(\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(y, z) \right) \right),$$

де $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$;

б) min-max композицією відношень $\underset{\sim}{R_1}$ і $\underset{\sim}{R_2}$ називається відношення $\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2}$, функція належності якого визначається так:

$$\mu_{\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2}}(x, z) = \bigwedge_y \left(\mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x, y) \vee \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(y, z) \right) = \min_y \left(\max \left(\mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(y, z) \right) \right) ;$$

в) максимультиплікативною композицією відношень $\underset{\sim}{R_1}$ і $\underset{\sim}{R_2}$ називається відношення $\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2}$, функція належності якого визначається так:

$$\mu_{\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2}}(x, z) = \bigvee_y \left(\mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(y, z) \right) = \max_y \left(\mu_{\underset{\sim}{R_1}}(x, y) \cdot \mu_{\underset{\sim}{R_2}}(y, z) \right).$$

Проте, застосувавши ці композиції як математичний інструментарій для дослідження нашої задачі, ми також одержимо протиріччя, які порушують економічну логіку. Заде Л. у своїй праці [25] пояснював це таким чином: «важливо відмітити, що із двох, а можливо і з більшої кількості визначень, найбільш відповідне вибирається залежно від змісту, який надається цій операції в кожному конкретному випадку».

Для пояснення суперечності результатів при застосуванні математичного інструментарію в дослідженні розглядуваної економічної задачі можна стверджувати таке. Задача поділу ринку на торгові зони полягає у визначенні ступеня сприйняття фірми споживачем як композиції переваги ознак фірми споживачем і сумісності фірми з розглядуваними ознаками, яка є за своїм економічним змістом не комутативною. Тому у разі використання в якості математичного інструментарію наведених вище композицій, суперечливість отриманих результатів пов'язана з тим, що вони містять операції об'єднання та перетину, які є комутативними. У разі використання формули (5) для визначення композиції ми позбуваємось комутативності математичного інструментарію, проте специфіка (5) така, що вона внаслідок наявності у її знаменнику суми переваг ознак фірми споживачем враховує не абсолютні значення переваг ознак, а відносні, що не відповідає економічному змісту задачі.

Для вирішення зазначеної проблеми авторами пропонується новий підхід щодо поділу ринку на торгові зони в нечітких умовах на підґрунті застосування відстані Хеммінга. Даний підхід враховує економічний зміст задачі та усуває некоректності розглянутого вище класичного підходу Леунга.

Поділ ринку на торгові зони на підґрунті відстані Хеммінга

Розглянемо наведені економічну і математичну постановки задачі поділу ринку на торгові зони. Для дослідження цієї задачі скористаємось поняттям відстані Хеммінга для нечітких множин: нехай задані нечіткі множини $\underset{\sim}{A}$ і $\underset{\sim}{B}$ на U, де U — скінченна універсальна множина потужністю q. Відстанню Хеммінга (або лінійною відстанню) між нечіткими множинами $\underset{\sim}{A}$ і $\underset{\sim}{B}$ називається число $d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$, яке визначається за формулою:

$$d\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)=\sum_{r=1}^{q}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r)\right|,$$

де $u_r \in U$, $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r)$, $\mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r) \in [0, 1]$, $r=\overline{1, q}$. Очевидно, що $0 \le d\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right) \le q$.

Введемо такі визначення.

Відстанню Хеммінга з додатнім відхиленням для нечіткої множини $\underset{\sim}{A}$*, або лінійною відстанню з додатнім відхиленням для нечіткої множини* $\underset{\sim}{A}$*, між нечіткими множинами* $\underset{\sim}{A}$ *і* $\underset{\sim}{B}$ назвемо число $d^{+}(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$, яке знаходиться за формулою:

$$d^{+}(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=\sum_{r=1}^{q}\alpha_r\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r)\right|, \tag{11}$$

де α_r — індикатор, який визначається таким чином:

$$\alpha_r = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r) \geq \mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r); \\ 0, & \text{якщо } \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r) < \mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r), \end{cases}$$

$$u_r \in U\,,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r)\,,\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r) \in [0, 1]\,,\ r = \overline{1, q}\,.$$

Відстанню Хеммінга з від'ємним відхиленням для нечіткої множини $\underset{\sim}{A}$*, або лінійною відстанню з від'ємним відхиленням для нечіткої множини* $\underset{\sim}{A}$*, між нечіткими множинами* $\underset{\sim}{A}$ *і* $\underset{\sim}{B}$ назвемо число $d^-(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$, яке знаходиться за формулою:

$$d^-(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sum_{r=1}^{q} \alpha_r \left| \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r) \right|, \tag{12}$$

де α_r — індикатор, який визначається так:

$$\alpha_r = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r) \leq \mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r); \\ 0, & \text{якщо } \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r) > \mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r), \end{cases}$$

$$u_r \in U\,,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_r)\,,\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(u_r) \in [0, 1]\,,\ r = \overline{1, q}\,.$$

Розглянемо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — множину споживачів, кожному елементу якої поставимо у відповідність нечітку множину X_i, $i = \overline{1, n}$, задану на універсальній множині $Y = (y_1, y_2, ..., y_s)$ із функцією належності, яка буде співпадати із елементом матриці $\underset{\sim}{R_1}$ по відповідному рядку.

Розглянемо $Z = (z_1, z_2, ..., z_m)$ — множину фірм, кожному елементу якої поставимо у відповідність нечітку множину Z_j, $j = \overline{1, m}$, задану на універсальній множині $Y = (y_1, y_2, ..., y_s)$ із функцією належності, яка буде співпадати із елементом матриці $\underset{\sim}{R_2}$ по відповідному стовпчику.

Тепер для характеристики несприятливих відхилень для споживача побудуємо матрицю $\underset{\sim}{R}_3$:

$$\underset{\sim}{R}_3 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \dots & z_m \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} \mathrm{d}^+(X_1, Z_1) & \mathrm{d}^+(X_1, Z_2) & \dots & \mathrm{d}^+(X_1, Z_m) \\ \mathrm{d}^+(X_2, Z_1) & \mathrm{d}^+(X_2, Z_2) & \dots & \mathrm{d}^+(X_2, Z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{d}^+(X_n, Z_1) & \mathrm{d}^+(X_n, Z_2) & \dots & \mathrm{d}^+(X_n, Z_m) \end{array} \right\| \end{array}, \qquad (13)$$

кожний елемент якої представляє собою відстань Хеммінга з додатним відхиленням між нечіткими множинами X_i і Z_j, яке знаходиться за формулою:

$$d^+(X_i, Z_j) = \sum_{l=1}^{s} \alpha_l \left| \mu_{X_i}(y_l) - \mu_{Z_j}(y_l) \right|, \qquad (14)$$

де α_l — індикатор, який визначається так:

$$\alpha_l = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_{X_i}(y_l) \geq \mu_{Z_j}(y_l); \\ 0, & \text{якщо } \mu_{X_i}(y_l) < \mu_{Z_j}(y_l), \end{cases}$$

де $y_l \in Y$, $\mu_{X_i}(y_l)$, $\mu_{Z_j}(y_l) \in [0, 1]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, s}$.

Елементи матриці $\underset{\sim}{R}_3$ за своєю економічною сутністю означатимуть для кожного споживача суму несприятливих відхилень ступеня оцінки ним ознак фірми від ступеня належності цих ознак до відповідної фірми. Аналізуючи цей показник з економічної точки зору, можна стверджувати, що чим менше це значення, тим більшою буде ступінь сприйняття споживачем відповідної фірми.

Тоді функції належності, які відповідають щойно розглянутій властивості і визначають ступінь сприйняття споживачем відповідної фірми, можна задати, наприклад, функцією Гауса у такому вигляді:

$$\mu_{Z_j}(x_i) = e^{-h(d^+(X_i, Z_j))^2} \qquad (15)$$

при $h > 0$ $\forall X_i$, $\forall Z_j$, $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

А це означає, що при монотонному зменшенні відстані Хеммінга з додатнім відхиленням ступінь сприйняття споживачем фірми монотонно збільшується.

Таким чином, для кожного елемента $z_j \in Z$, $j = \overline{1, m}$, ми отримали нечітку множину Z'_j, задану на універсальній множині X із функцією належності (15). Якщо в матриці $\underset{\sim}{R_3}$ (13) замість характеристик несприятливих відхилень для споживачів підставити функції належності (15), отримаємо відповідну їй матрицю ступенів сприйняття кожної фірми кожним споживачем:

$$\underset{\sim}{R_4} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \dots & z_m \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} \mu_{Z_1}(x_1) & \mu_{Z_2}(x_1) & \dots & \mu_{Z_m}(x_1) \\ \mu_{Z_1}(x_2) & \mu_{Z_2}(x_2) & \dots & \mu_{Z_m}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{Z_1}(x_n) & \mu_{Z_2}(x_n) & \dots & \mu_{Z_m}(x_n) \end{array} \right\| \end{array}. \qquad (16)$$

У результаті для кожної фірми ми одержали нечіткі кластери споживачів, які характеризують їх сприйняття відповідної фірми, що можна вважати розв'язком задачі. Якщо особа, яка приймає рішення (ОПР), бажає одержати конкретні зони впливу, то можна запропонувати шляхом встановлення порогу поділу за значеннями функцій належностей визначати відповідні торгові зони кожної з фірм. Наприклад, за поріг поділу на торгові зони можна вибрати $k = 0{,}5$, що в теорії нечітких множин називається перехідним числом і означає середню ступінь належності до множини.

Тоді торгові зони $M_j = \{x_i \mid \mu_{Z_j}(x_i) \ge k,\ x_i \in X,\quad i = \overline{1, n}\}$ будуть задаватися множинами рівня $k = 0{,}5$:

$$M_j = \{x_i \mid \mu_{Z_j}(x_i) \ge 0{,}5,\ x_i \in X,\quad i = \overline{1, n}\},\ j = \overline{1, m}. \qquad (17)$$

Поріг поділу можна задавати різними способами, використовуючи ту чи іншу методологію, але з обов'язковим врахуванням конкретної економічної постановки задачі. Важливо наголосити, що маючи значення функцій належностей (15), ОПР має повну інформацію щодо зон впливу розглядуваних фірм.

У загальному випадку, використовуючи теорію торгових зон, а саме поняття первинної, вторинної, третинної торгової зони, які означають частоту відвідувань — відповідно, «часте», «рідке», «інколи» (іншими словами, ступінь належності до них потенційного споживача), можна більш глибоко описати відповідні торгові зони на основі значень функцій належності (15).

Застосуємо запропонований у цій статті метод до розв'язання розглядуваної прикладної задачі поділу ринку на торгові зони.

Використовуючи значення нечітких відношень (8) і (9), знайдемо елементи матриці (13) за формулою (14), тобто для кожного споживача знайдемо суму несприятливих відхилень ступеня оцінки ним ознак торгових компаній від значень ознак кожної окремої компанії. У результаті будемо мати:

$$\underset{\sim}{R_3} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0,1 & 0,9 & 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,1 & 0,5 & 0,6 \\ 0,2 & 0,9 & 0,5 & 0,4 \\ 1,4 & 2 & 1,9 & 1,7 \\ 0,2 & 1,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0 & 1,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,7 & 0,5 & 0,5 & 0,6 \\ 0,1 & 0,8 & 0 & 0,1 \\ 0,6 & 0,9 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}. \qquad (18)$$

Застосовуючи функцію Гауса (15) при $h = 1$, одержимо значення функцій належностей і запишемо їх у вигляді матриці (16), елементи якої визначають ступінь сприйняття споживачем відповідної фірми:

$$\underset{\sim}{R_4} = \begin{array}{c|cccc|} & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ x_1 & 0{,}990 & 0{,}445 & 0{,}779 & 0{,}914 \\ x_2 & 0{,}779 & 0{,}990 & 0{,}852 & 0{,}852 \\ x_3 & 0{,}698 & 0{,}990 & 0{,}779 & 0{,}698 \\ x_4 & 0{,}961 & 0{,}445 & 0{,}779 & 0{,}852 \\ x_5 & 0{,}141 & 0{,}018 & 0{,}027 & 0{,}056 \\ x_6 & 0{,}961 & 0{,}105 & 0{,}613 & 0{,}779 \\ x_7 & 1{,}000 & 0{,}185 & 0{,}779 & 0{,}961 \\ x_8 & 0{,}613 & 0{,}779 & 0{,}779 & 0{,}698 \\ x_9 & 0{,}990 & 0{,}527 & 1{,}000 & 0{,}990 \\ x_{10} & 0{,}698 & 0{,}445 & 0{,}779 & 0{,}779 \\ x_{11} & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 \\ x_{12} & 0{,}527 & 0{,}368 & 0{,}368 & 0{,}368 \end{array}. \qquad (19)$$

Елементи стовпчиків цієї матриці можна розглядати як значення функцій належностей до відповідних нечітких кластерів, які відповідають множині фірм. Проаналізуємо ступінь відношення споживачів x_5, x_9, x_{11} до заданих фірм із врахуванням економічних факторів — властивостей фірм і соціо-психологічних характеристик споживачів.

Для споживача x_5 (ступінь оцінки всіх ознак 1) ступені оцінювання фірм z_1, z_2, z_3, z_4 відповідно дорівнюють: 0,141; 0,018; 0,027; 0,056.

Для споживача x_9 (ступінь оцінки всіх ознак 0,5) ступені сприйняття фірм z_1, z_2, z_3, z_4 відповідно дорівнюють: 0,990; 0,527; 1,000; 0,990.

Для споживача x_{11} (ступінь оцінки всіх ознак 0,1) сприйняття фірм z_1, z_2, z_3, z_4 відповідно становить: 1,000; 1,000; 1,000; 1,000.

Тобто ми бачимо, що в розрахунках за запропонованим авторами підходом немає протиріччя економічній логіці.

Визначимо на основі матриці (19) за формулою (17) торгові зони для відповідних фірм $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, використовуючи поріг поділу k=0,5. Будемо мати:

M_1=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}),

M_2=(x_2, x_3, x_8, x_9, x_{11}),

$M_3=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11})$,

$M_4=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11})$.

Збільшуючи значення порогу поділу одержимо менші зони впливу. Зокрема, для порогу поділу k=0,7 матимемо:

$M_1=(x_1, x_2, x_4, x_6, x_7, x_9, x_{10}, x_{11})$,

$M_2=(x_2, x_3, x_8, x_{11})$,

$M_3=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11})$,

$M_4=(x_1, x_2, x_4, x_6, x_7, x_9, x_{10}, x_{11})$.

Аналізуючи одержані результати можна бачити, що споживач x_{11}, який ставиться до всіх ознак з дуже маленьким ступенем 0,1 (тобто він майже байдужий, яким властивостям відповідає фірма, і тому повинен належати усім торговим зонам), згідно результатів розрахунків за запропонованим нами підходом потрапляє до всіх торгових зон, що не суперечить економічній логіці, на відміну від результатів використання підходу Леунга [21], який базується на застосуванні композиції бінарних відношень.

Розглянемо застосування методу поділу на торгові зони на підґрунті відстані Хеммінга в окремому випадку, вказаному у праці [21], коли множина фірм Z складається з двох елементів — z_1, z_2, які оцінюються тільки за однією ознакою, тобто множина Y містить один елемент y_1. У цьому разі початкові дані (а саме матриці $\underset{\sim}{R}_1$ і $\underset{\sim}{R}_2$ нечітких бінарних відношень) мають вигляд:

$$\underset{\sim}{R}_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{c} y_1 \\ \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0,8 \\ 0,7 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,6 \\ 0,1 \\ 0 \end{array} \right\| \end{array}, \quad \underset{\sim}{R}_2 = \begin{array}{c} \\ y_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 0,9 & 0,1 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Використовуючи послідовність дій згідно запропонованого нами методу, одержимо такі результати:

$$\underset{\sim}{R_3} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0,7 \\ 0 & 0,6 \\ 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 \\ 0 & 0,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}. \qquad (20)$$

Нагадаємо, що елементи матриці $\underset{\sim}{R_3}$ (20) економічно означають для кожного споживача суму несприятливих відхилень ступеня його оцінки ознак торгових компаній від оцінок ознак відповідних фірм, що вказує на те, чим менше це значення, тим більше буде ступінь сприйняття відповідної фірми споживачем. Далі, застосовуючи функцію Гауса (15) при $h = 1$, одержуємо:

$$\underset{\sim}{R_4} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 0,990 & 0,445 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0,990 & 0,445 \\ 1 & 0,613 \\ 1 & 0,698 \\ 1 & 0,852 \\ 1 & 0,852 \\ 1 & 0,779 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array}. \qquad (21)$$

Елементи стовпчиків матриці (21) є значеннями функцій належностей споживачів до відповідних нечітких кластерів, які відповідають множині фірм. Більше того, для деяких споживачів ми можемо спостерігати чітку належність їх до розглядуваних компаній (функція належності дорівнює 1).

Цікавим у подальших дослідженнях може бути аналіз так званої множини байдужості, яка існує в теорії торгових зон, елементи якої представляють однаковий ступінь вибору фірми. Для нашої задачі маємо таку множину байдужості:

$$MV = (x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12}).$$

Застосуємо до цього одновимірного випадку класичний підхід із використанням композиції відношень, запропонований Леунгом у праці [21]. Для побудови торгових зон спочатку знайдемо елементи матриці $\underset{\sim}{R}_3$, використовуючи формулу (5):

$$\underset{\sim}{R}_3 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 0{,}9 & 0{,}1 \\ - & - \\ - & - \\ - & - \\ 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \\ - & - \end{array} \right\| \end{array},$$

де символ «–» означає відсутність даних внаслідок ділення на нуль у формулі (5).

Аналізуючи одержані результати, ми бачимо, що всі споживачі, крім споживачів x_2, x_3, x_4, x_{12}, для яких формула (5) не може бути обчислена, при поділі на торгові зони незалежно від ставлення до ознаки y_1 мають однакові оцінки ступеня переваги щодо розглядуваних компаній, які співпадають із оцінками компаній за ознакою y_1, що суперечить економічній логіці. Подальші дослідження за цим підходом, а саме розрахунок матриці W і поділ на торгові зони, неможливі. Тобто у даному випадку ми спостерігаємо некоректність застосування класичного підходу як у теоретичному, так і в економічному сенсі.

Отже, можна бачити, що для одновимірного випадку, коли фірма характеризується однією ознакою, розв'язок задачі за розробленим у статті методом існує, на відміну від застосування до такої задачі підходу Леунга [21].

Слід наголосити, що сьогодні перспективним напрямком наукових досліджень в області аналізу, прогнозування та моделювання економічних явищ і процесів є застосування теорії нечітких множин, що є потужним інструментарієм моделювання складних систем. Проте цей інструментарій потребує не тільки володіння відповідним математичним апаратом, але, і найголовніше, він потребує розуміння змісту застосовуваних операцій у рамках розв'язання прикладних економічних задач, про що не раз наголошував у своїх працях Л. Заде.

Висновки

У статті проаналізовано можливість застосування в економічних дослідженнях моделі поділу ринку на торгові зони в нечітких умовах, яка базується на використанні композиції бінарних відношень, представленої у праці Леунга [21]. Дослідження показало, що використання в якості математичного інструментарію max-min або min-max композиції, а також максимультиплікативної згортки (для визначення ступеня сприйняття фірми споживачем як композиції ставлення до ознак фірми споживачем і сумісності фірми з розглядуваними ознаками), яка є за своїм економічним змістом не комутативною, приводить до нелогічних результатів з позицій економіки. У разі використання для здійснення композиції формули, що є аналогом центра тяжіння нечіткої множини, ми позбуваємось комутативності математичного інструментарію, проте дана формула враховує не абсолютні значення переваг ознак, а відносні, що також не відповідає економічному змісту задачі та призводить до суперечливих результатів.

Для дослідження моделі поділу на торгові зони в нечітких умовах запропоновано новий підхід на підґрунті застосування відстані Хеммінга. Даний підхід враховує економічний зміст задачі та усуває некоректності класичного підходу, заснованого на композиції бінарних відношень.

У роботі введено нові поняття, такі як відстань Хеммінга з додатним відхиленням для нечіткої множини та відстань Хеммінга з від'ємним відхиленням для нечіткої множини.

Запропоновано методологію визначення порогу поділу, а також розширення поняття розв'язку задачі поділу на торгові зони, а саме запропоновано не тільки виділяти торгові зони, а й досліджувати первинні, вторинні, третинні торгові зони як ступінь належності до потенційного споживача, використовуючи значення функцій належності.

Результати вирішення прикладної задачі за допомогою запропонованого у статті підходу є логічними і не суперечливими реальним процесам в економіці.

Крім того, у статті отримано деякі узагальнюючі міркування щодо застосування математичних операцій з теорії нечітких множин. Показано, що цей інструментарій потребує розуміння змісту застосовуваних операцій у рамках розв'язання прикладних економічних задач, про що не раз наголошував у своїх працях Л. Заде.

Наприклад, якщо розглянути теоретико-множинні операції класичної математики, то тут існує лише одна бінарна операція об'єднання множин, а в теорії нечітких множин їх три — об'єднання нечітких множин, об'єднання як обмежена сума, об'єднання як алгебраїчна сума, і всі вони мають різний зміст. Це означає, що для дослідження ми маємо більшу кількість операцій, що підвищує гнучкість моделювання. Важливе значення у прикладних задачах має поняття добутку, або композиції нечітких відношень, яке на відміну від чіткого випадку можна здійснювати різними способами: як аналог центра тяжіння нечіткої множини, мінімаксну, максимінну, максимультиплікативну згортку і всі вони мають різний економічний зміст. А це означає, що будь-яку з наведених операцій необхідно застосовувати з урахуванням цілі дослідження, інакше, як засвідчив проведений аналіз, можна одержати некоректні результати.

Література

1. *Applebaum W.* The Dynamics of Store Trading Areas and Market Equilibrium / Applebaum W., Cohen S.B. // Annals of the Association of the American Geographer. – 1961. — No. 51. — P. 73—101.

2. *Fetter F.A.* The economic law of market areas / Fetter F.A. // Q. J. Econ. - 1924. — No. 39. — P. 520—529.

3. *Костерин И. Г.* Пространственный анализ предпочтений покупателей розничных магазинов на территории города / Костерин И. Г. // Практический маркетинг. — 2007. — № 10. — С. 2—12.

4. *Christaller W.* Central Places in Southern Germany / Christaller W., Baskin C.W. — NJ: Prentice Hall, 1967. — P. 81—90.

5. *Lasch A.* The Economics of Location / Lasch A. — 2nd edn. — CT: New Haven, 1954.

6. *Reilly W. J.* The Law of Retail Gravitation / Reilly W. J. — New York: W.J. Reilly, Inc, 1931.

7. *Converse P. D.* New Laws of Retail Gravitation / Converse P. D. // Journal of Marketing. — 1949. — No. 14. — P. 94—102.

8. *Batty M.* Reilly's Challenge: New Laws of Retail Gravitation Which Define Systems of Central Places / Batty M. // Environment and Planning A. — 1978. — No. 10. — P. 185—219.

9. *Luce R.* Individual Choice Behaviour / Luce R. — New York: John Wiley & Sons. — 1959.

10. *Huff D. L.* A Probabilistic Analysis of Shopping Center Trade Areas / Huff D.L. // Land Economics. — 1963. — No. 39. — P. 81—90.

11. *Colome R.* A New Chance - Constrained Maximum Capture Location Problem / Colome R., Lourenco H. R., Serra D. L. // Working Paper. — Barcelona: Universitat Pompeu Fabra. — 2003. — September. — P. 1—38.

12. *Nakanishi M.* Parameter Estimate for multiplicative Interactive Choice Model: Least Squares Approach / Nakanishi M., Cooper L.G. // Journal of Marketing Research. — 1974. — No. 11. — August. — P. 303—311.

13. *Colome R.* Supermarket Key Attributes and Location Decisions: A Comparative Study between British and Spanish Consumers / Colome R., Serra D. // Working Paper. – Barcelona: Universitat Pompeu Fabra. — 2003. — October. — P. 1—56.

14. *McFadden D.* Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behaviour / McFadden D. // Frontiers in Econometrics, ed. P. Zarembka. — New York: Academic Press. — 1974. — P. 105—142.

15. *Gonzalez-Benito Oscar.* Asymmetric competition in retail store formats: Evaluating inter- and intra-format spatial effects / Gonzalez-Benito Oscar, Munoz-Gallego Pablo A., Kopalle Praveen K. // Journal of Retailing. — 2005. — No. 81. — P. 59—73.

16. *Foteringham A. S.* A New Set of Spatial Interaction Models: The Theory of Competing Destinations / Foteringham A.S. // Environment and Planning. — 1983. — No. 15. — P. 15—36.

17. *Tomoki Nakaya A.* Combining microsimulation and spatial interaction models for retail location analysis / Tomoki Nakaya A., Fotheringham Stewart, Hanaoka Kazumasa, Clarke Graham, Ballas Dmitris, Yano Keiji // Journal of Geographic Systems. –— 2007. — No. 9. — P. 345—369.

18. *Rust R. T.* Capturing Geographically Localized Misspecification Error in Retail Store Choice Models / Rust R. T., Donthu N. // Journal of Marketing Research. — 1995. — Vol. XXXII. — February. — P. 103—110.

19. *Ponsard C.* Fuzzy economic spaces / Ponsard C. // Document de travail No 43, Institute de Mathematiques Economiques, Universite de Dijon. — 1980.

20. *Gale S.* Inexactness, fuzzy set and the foundations of behavioral geography / Gale S. // Geographical Analysis. — 1972. — No. 4. — P. 337—349.

21. *Леунг Й.* Разделение на торговые зоны в нечетких условиях / Леунг Й. // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. Под ред. Р. Ягера. — 1986. — С. 339—349.

22. *Кулиев Б. О.* Два возможных подхода формирования товарной группы и моделирование разбиения рынка / Кулиев Б. О., Михалев А. В. // «Математические методы и приложения»: Труды VI математических чтений МГСУ. — М.: МГСУ. — 1999. — С. 160—167.

23. *Кулиев Б. О.* Алгоритмы и структуры теории нечетких множеств в исследовании некоторых экономических и игровых моделей / Кулиев Б. О. — Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. — М. : МГУ, 2003. — 94 с.

24. *Раков А. А.* Методические указания к выполнению лабораторной работы на тему «Распределение торговых зон» по дисциплине «Информационные системы и математические методы в маркетинге» для студентов, обучаемых в магистратуре специальности 8.050201 «Менеджмент организаций» и слушателей курсов повышения квалификации / Раков А. А. — Севастополь: СевНТУ, 2007. — С. 20.

25. *Zade L.* The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning / L. Zade // Information Sciences. — 1975. — Vol. 8. — P. 199—249.

References

1. Applebaum, W., & Cohen, S. B. (1961). The Dynamics of Store Trading Areas and Market Equilibrium. *Annals of the Association of the American Geographer*, *51*, 73—101.

2. Fetter, F. A. (1924). The economic law of market areas. *Q.J. Econ.*, *39*, 520—529.

3. Kosterin, I. G. (2007). Prostranstvennyj analiz predpochtenij pokupatelej roznichnyh magazinov na territorii goroda. *Prakticheskij marketing (Practical Marketing), 10*, 2—12. [In Russian].

4. Christaller, W., & Baskin, C. W. (1967). *Central Places in Southern Germany*. NJ: Prentice Hall.

5. Lasch, A. (1954). *The Economics of Location*. 2nd edn. CT: New Haven.

6. Reilly, W. J. (1931). *The Law of Retail Gravitation*. New York: W. J. Reilly, Inc.

7. Converse, P. D. (1949). New Laws of Retail Gravitation. *Journal of Marketing, 14*, 94—102.

8. Batty, M. (1978). Reilly's Challenge: New Laws of Retail Gravitation Which Define Systems of Central Places. *Environment and Planning A, 10*, 185—219.

9. Luce, R. (1959). *Individual Choice Behaviour*. New York: John Wiley & Sons.

10. Huff, D. L. (1963). A Probabilistic Analysis of Shopping Center Trade Areas. *Land Economics, 39*, 81—90.

11. Colome, R., Lourenco, H. R., & Serra, D. L. (2003, September). A New Chance — Constrained Maximum Capture Location Problem. *Working Paper (Barcelona: Universitat Pompeu Fabra)*, 1—38.

12. Nakanishi, M., & Cooper, L. G. (1974, August). Parameter Estimate for multiplicative Interactive Choice Model: Least Squares Approach. *Journal of Marketing Research*, *11*, 303—311.

13. Colome, R., & Serra, D. (2003, October). Supermarket Key Attributes and Location Decisions: A Comparative Study between British and Spanish Consumers. *Working Paper (Barcelona: Universitat Pompeu Fabra)*, 1—56.

14. McFadden, D. (1974). Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behaviour. *Frontiers in Econometrics*. New York: Academic Press.

15. Gonzalez-Benito, O., Munoz-Gallego, P. A., & Kopalle Praveen K. (2005). Asymmetric competition in retail store formats: Evaluating inter- and intra-format spatial effects. *Journal of Retailing*, *81*, 59—73.

16. Foteringham, A. S. (1983). A New Set of Spatial Interaction Models: The Theory of Competing Destinations. *Environment and Planning*, *15*, 15—36.

17. Tomoki, N. A., Fotheringham, S., Hanaoka, K., Clarke, G., Ballas, D., & Yano K. (2007). Combining microsimulation and spatial interaction models for retail location analysis. *Journal of Geographic Systems*, *9*, 345—369.

18. Rust, R. T., & Donthu, N. (1995, February). Capturing Geographically Localized Misspecification Error in Retail Store Choice Models. *Journal of Marketing Research*, *32*, 103—110.

19. Ponsard, C. (1980). Fuzzy economic spaces. *Document de travail*, *43*.

20. Gale, S. (1972). Inexactness, fuzzy set and the foundations of behavioral geography. *Geographical Analysis*, *4*, 337—349.

21. Leung, J. (1986). Razdelenie na torgovye zony v nechetkih uslovijah. *Nechetkie mnozhestva i teorija vozmozhnostej. Poslednie dostizhenija*, 339—349 [In Russian].

22. Kuliev, B. O., & Mihalev, A. V. (1999). Dva vozmozhnyh podhoda formirovanija tovarnoj gruppy i modelirovanie razbienija rynka. *Matematicheskie metody i prilozhenija. Trudy VI matematicheskih chtenij (Moscow, MGSU)*, 160—167 [In Russian].

23. Kuliev, B. O. (2003). *Algoritmy i struktury teorii nechetkih mnozhestv v issledovanii nekotoryh ekonomicheskih i igrovyh modelej*. Dis. kandidata fiz.-mat. nauk: 01.01.09, Moscow: MGU [In Russian].

24. Rakov, A. A. (2007). *Metodicheskie ukazanija k vypolneniju laboratornoj raboty na temu «Raspredelenie torgovyh zon» po discipline «Informacionnye sistemy i matematicheskie metody v marketinge»*. Sevastopol’: SevNTU [In Russian].

25. Zade, L. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, *8*, 199—249.

Стаття надійшла до редакції 18.05.2015