

ГРАФОДИНАМІЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНОСТІ СУЧАСНИХ ФОНДОВИХ РИНКІВ

В. М. Соловійов

Доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри економічної кібернетики

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
бульвар Шевченка, 81, м. Черкаси, 18031, Україна
vnsoloviev2016@gmail.com

А. Ш. Тулякова

Магістр математики,
асистент кафедри вищої математики

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2, м. Одеса, 65082, Україна
tuliakovaanna@gmail.com

У статті запропоновано концептуально новий методологічний підхід до аналізу фінансових часових рядів, який автори застосовують разом з іншими для дослідження складності фінансових ринків. Суть цього підходу полягає в тому, що для побудови нового міру динамічної складності ринку часові ряди фінансових даних попередньо перетворюються в складні мережі на основі ідеї рекурентності точок фазової траєкторії системи. Далі для побудованої мережі розраховується широкий набір показників, що відображають різноманітні спектральні і топологічні характеристики мережі. Реалізація алгоритму ковзного вікна дозволяє прослідкувати графодинаміку складної системи. Якщо та чи інша з визначених мір складності проявляє характерну поведінку у часі, яка збігається з певними критичними змінами на фінансових ринках, її можна використати у якості індикатора-передвісника таких змін. Проведене експериментальне дослідження складних мереж, побудованих у рамках запропонованого методологічного підходу, підтвердило його адекватність і високу здатність до передбачення кризових явищ на фондових ринках.

Ключові слова: *складні мережі, графодинаміка, рекурентні мережі, динамічна складність, динаміка фондових ринків, аналіз часових рядів.*

ГРАФОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНОСТИ СОВРЕМЕННЫХ ФОНДОВЫХ РЫНКОВ

В. Н. Соловьёв

Доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедры экономической кибернетики

Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого
бульвар Шевченко, 81, г. Черкассы, 18031, Украина
vnsoloviev2016@gmail.com

А. Ш. Тулякова

Магистр математики,
ассистент кафедры высшей математики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, г. Одесса, 65082, Украина
tuliakovaanna@gmail.com

В статье предложен концептуально новый методологический подход к анализу финансовых временных рядов, применяемый авторами наряду с другими для исследования сложности финансовых рынков. Суть этого подхода заключается в том, что для построения новых мер динамической сложности рынка временные ряды предварительно трансформируются в сложные сети на основе идеи рекуррентности точек фазовой траектории системы. Затем для построенной сети рассчитывается широкий набор показателей, отражающих разнообразные спектральные и топологические характеристики сети. Реализация алгоритма скользящего окна позволяет проследить графодинамику сложной системы. Если та или иная из выбранных мер сложности проявляет характерное поведение во времени, совпадающее с определенными критическими изменениями на финансовых рынках, то ее можно использовать в качестве индикатора-предвестника таких изменений. Проведенное экспериментальное исследование сложных сетей, построенных в рамках предлагаемого методологического подхода, подтвердило его адекватность и высокую способность к предсказанию кризисных явлений на фондовых рынках.

Ключевые слова: *сложные сети, графодинамика, рекуррентные сети, динамическая сложность, динамика фондовых рынков, анализ временных рядов.*

GRAPHODYNAMICAL RESEARCH METHODS FOR COMPLEXITY OF MODERN STOCK MARKETS

Vladimir Soloviev

DSc (Physics and Mathematical Sciences), Professor,
Head of the Department of Economic Cybernetics

Cherkasy National University named after Bogdan Khmelnytsky
81 Shevchenko Blvd., Cherkasy, 18031, Ukraine
vnsoloviev2016@gmail.com

Anna Tuliakova

Master's Degree in Mathematics,
Teaching Assistant of Department of Higher Mathematics

Odessa National University named after I. I. Mechnikov
2 Dvoryanskaya str., Odessa, 65082, Ukraine
tuliakovaanna@gmail.com

The authors propose in this article a conceptually new methodological approach to the analysis of financial time series, which is used along with other methods for the study of financial markets' complexity. The core idea of this approach is construction of new measures of market's dynamic complexity on the basis of transforming the time series of financial data to «complex networks» based on the principle of recurrence of states in system's phase trajectory. Then for built network is calculated a wide set of measures that represent a variety of spectral and topological characteristics of the network. The realization of «sliding window» algorithm allows tracing the graphodynamics of the complex system. It's expedient to use as an indicator-harbinger of changes in the financial markets such from selected measures of complexity, which demonstrates a characteristic behavior in time, coinciding with certain critical market changes. Experimental studies of complex networks, constructed in the framework of proposed methodological approach, confirmed their adequacy and high ability to predict the crisis phenomena in the stock markets.

Keywords: *complex networks, graphodynamics, recurrence networks, dynamical complexity, stock markets' dynamics, time series analysis.*

JEL Classification: F37, C69

Вступ

Відомий науковий журнал «Nature Physics» у 2013 році визначив «фокусом» свого випуску напрямок «Складні мережі в фінансах» і закликав фізиків і математиків займатися дослідженнями можливості ефективного застосування нової наукової області «теорії складних мереж» до найактуальніших проблем в існуючій світовій фінансовій системі [1].

Теорія складних мереж (TCM) загалом являє собою не окремий напрямок, а доволі широку міждисциплінарну область знань, до якої відносяться дослідження самого різноманітного характеру про будову світу. TCM швидко розвивається, наразі закладено її основні поняття та отримано тільки перші результати. Дослідники, що працюють у цій області, прийшли з математики, фізики, біології, медицини, епідеміології, телекомунікацій, інформатики, соціології, економіки. Відповідно результати досліджень мають як теоретичне значення, так і практичне застосування в цих науках.

У контексті TCM, складні мережі (англ. complex networks) — це графи (мережі) з нетривіальними топологічними властивостями — властивостями, які не зустрічаються в простих мережах, таких як регулярні решітки або чисто випадкові графи, але часто спостерігаються в графах, що моделюють реальні системи. Власне топологічні властивості мережі складають основний предмет дослідження TCM, тому що саме вони суттєво визначають функціонування мережі, і тому можуть розглядатися абстраговано від природи походження досліджуваної системи.

Протягом останніх років аналіз складних систем різної природи отримав новий імпульс завдяки переходу одновимірних часових послідовностей, що генеруються системами у той чи інший спосіб, до мережних чи навіть мультимережних відображень часових рядів [2].

Ця стаття присвячена дослідженню динамічної складності фондових ринків із застосуванням одного з методів перетворення часового ряду в складну мережу на основі концепції рекурентності. Сам метод перетворення часового ряду в «рекурентну мережу» взято з роботи [3], в якій також проведено аналітичний огляд і кількох інших існуючих методів перетворення часових рядів в граф.

Метою даної роботи є розробка методологічного підходу аналізу складності сучасних фондових ринків на основі графодинамічного методу дослідження.

Дослідження графодинамічних характеристик фінансових часових рядів

У нашому дослідженні згаданий вище метод перетворення часового ряду в рекурентну мережу [3] став ядром методологічного підходу, в основу якого покладено принцип обрахунку характеристик ряду в ковзному вікні, що дозволяє досліджувати графодинаміку системи. Вказаний підхід складається з таких етапів:

Етап 1. *Первинна обробка фінансових часових рядів.*

Етап 2. *Фазовий простір системи, два варіанти побудови траєкторії.*

Етап 3. *Дослідження рекурентності фазової траєкторії.*

Етап 4. *Розрахунок показників на підґрунті віконної технології.*

Етап 5. *Побудова мережі за матрицею рекурентності.*

Етап 6. *Розрахунок комплексу мережних характеристик.*

Етап 7. *Співставлення динаміки розрахованих показників і динаміки індексу. Пошук індикаторів, передвісників.*

Етап 1. Первинна обробка фінансових часових рядів.

Дослідження окремого фондового ринку проводимо на основі аналізу даних, що продукуються в результаті торгів на відповідній біржі. Розглянемо часовий ряд значень *біржового індексу* I за обраний період, а також часові ряди цін *певного набору* з K різних акцій — $P_1, P_2, \dots, P_K$, з однаковою дискретизацією (тобто, наприклад, якщо розглядаються денні значення цін закриття, то необхідно впевнитися, що часові ряди відповідають однаковій послідовності дат — торгових днів, які занумеруємо в порядку зростання $t = 1, \dots, M$):

$$\{I(t)\}_{t=1}^M, \\ \{P(t)\}_{t=1}^M, \text{ для } \forall k = 1, \dots, K.$$

У деяких випадках подальші розрахунки можна проводити і для цих вхідних часових рядів індексу або цін акцій, але також будемо працювати і з похідними часовими рядами *прибутковостей* (англ. returns):

$$\left\{ \text{ret}_- I(t) = \frac{I(t) - I(t-1)}{I(t-1)} \right\}_{t=1}^M,$$

$$\left\{ \text{ret} - P_k(t) = \frac{P_k(t) - P_k(t-1)}{P_k(t-1)} \right\}_{t=1}^M \quad \forall k=1, \dots, K,$$

які ще додатково «нормалізуються» шляхом віднімання середнього значення та подальшого ділення на середньоквадратичне відхилення. Таким похідним часовим рядом **нормалізованих прибутковостей** уже властива стаціонарність.

Будуємо суміщені графіки і проводимо візуальний аналіз, звертаючи увагу на розмежування на періоди різних типів динаміки, а також виявляємо особливості у динаміці деяких окремих акцій, за необхідності вилучаємо випадкові викиди.

На рис. 1 для прикладу наведено суміщені на одній шкалі від 0 до 1 часові ряди денних значень індексу Доу Джонса (англ. Dow Jones Industrial Average — djia) та його нормалізованих прибутковостей за період часу з 01.03.1984 до 27.06.2016. На рисунку позначено дати всіх відомих кризових явищ за даний період часу. З рис. 1 видно, що помітним флуктуаціям часового ряду індексу відповідають значні коливання нормалізованих прибутковостей.

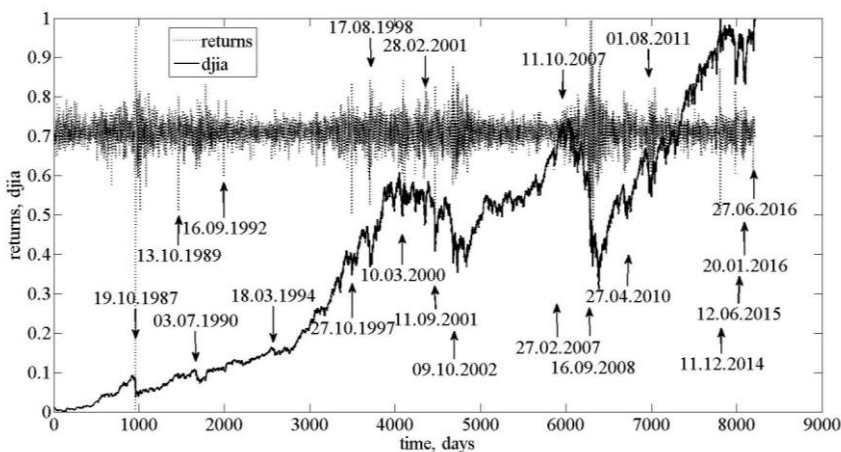


Рис. 1. Порівняльна динаміка часових рядів фондового індексу djia та його нормалізованих прибутковостей returns (01.03.1984—27.06.2016)

Етап 2. Фазовий простір системи, два варіанти побудови траєкторії.

Стан системи описується сукупністю із d істотних змінних стану $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_d\}$. Впорядкований набір значень цих змінних у певний момент часу t — *вектор стану* $\vec{V}(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_d(t))$ — є точкою у d -вимірному фазовому просторі. Послідовність векторів $\{\vec{V}(t)\}_{t=1}^M$ утворює дискретну *траєкторію системи* за аналізований період часу. Еволюція траєкторії описує динаміку системи та її *аттрактор*. Форма траєкторії дозволяє робити висновки щодо характеру процесу.

У дослідженнях *реальних складних систем* буває так, що спостережуваної інформації недостатньо для побудови реальної фазової траєкторії системи: не всі змінні стану можна спостерігати чи адекватно виміряти, або взагалі може бути невідомо, скільки в системі таких істотних змінних стану (тобто невідомою є розмірність фазового простору d). Часто дослідник має у своєму розпорядженні інформацію про поведінку тільки однієї змінної стану — тобто одновимірний часовий ряд, що продукується системою. В таких випадках зазвичай застосовують теорему Такенса, що дозволяє з такого одновимірного часового ряду методом часових затримок побудувати фазову траєкторію, еквівалентну за своєю топологічною структурою оригінальній траєкторії системи. Для такої побудови, що часто називають «*реконструкцією аттрактора*», необхідно два вхідних параметри — розмірність вкладення q і часова затримка τ [4].

При дослідженнях фондового ринку, як складної динамічної системи, також необхідно визначитися з розмірністю фазового простору системи і тією наявною спостережуваною інформацією, що може бути використана для ідентифікації та оцінки істотних змінних стану системи. Фондова біржа продукує часові ряди цін окремих фінансових активів (акцій) і часові ряди індексів. Біржовий індекс — це інтегральний показник, що розраховується на основі біржових котирувань певної групи акцій (так званого «індексного кошика»). Як правило, самі значення індексу для аналізу динаміки ринку не важливі. Більше значення мають зміни індексу за деякий час, оскільки вони дозволяють робити висновки про загальний напрямок руху ринку, навіть у тих випадках, коли ціни акцій всередині індексного кошику змінюються в різних напрямках.

З одного боку, дійсно можна розглядати тільки одновимірний часовий ряд індексу як найбільш інформативний інтегральний по-

казник ринку, і при цьому простий і зручний у використанні. З іншого боку, можна обрати певний набір одновимірних часових рядів цін окремих акцій і поставити кожний з них у відповідність окрему змінну стану системи, якщо це видається коректним з позицій цілей аналізу системи ринку. Враховуючи викладене, пропонуємо два варіанти побудови фазового простору і траєкторії системи, які назовемо умовно «реконструйована індексна траєкторія» і «реальна траєкторія набору акцій».

«**Реконструйована індексна траєкторія**». У q -вимірному фазовому просторі ($d = q$) будуємо за методом Такенса пару траєкторій:

I. одну — з вхідного часового ряду індексу $\{\vec{V}_I(t)\}_{t=t_1}^M$ з векторами стану вигляду $\vec{V}_I(t) = (I(t), I(t - \tau), \dots, I(t - (q - 1)\tau))$;

II. іншу — з його похідного часового ряду нормалізованих прибутковостей $\{\vec{V}_{ret_I}(t)\}_{t=t_1}^M$ з векторами $\vec{V}_{ret_I}(t) = (ret_I(t), ret_I(t - \tau), \dots, ret_I(t - (q - 1)\tau))$.

Зворотний порядок координат не випадковий — це необхідно для зручності накладання динаміки індексу та обчислюваних показників, яке здійснюється на останньому етапі алгоритму (див. Етап 7). При використанні такої реконструйованої траєкторії слід пам'ятати, що початковий точці траєкторії, тобто першому вектору стану відповідає момент часу $t_1 = 1 + (q - 1)\tau$.

На рис. 2 наведено відповідні реконструйовані аттрактори для часових рядів, представлених на рис. 1. У розрахунках ми використовували такі параметри: розмірність вкладення $q = 3$, часову затримку $\tau = 1$.

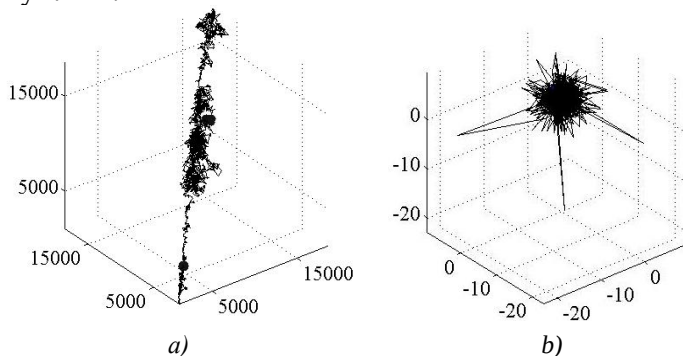


Рис. 2. Реконструйовані аттрактори для одновимірних часових рядів фондового індексу djia (a) та його нормалізованих прибутковостей (b), розраховані з параметрами ($q = 3$, $\tau = 1$)

«**Реальна траєкторія набору акцій**». Для набору з K акцій на основі відповідних одновимірних часових рядів формуємо дві послідовності K -вимірних ($d = K$) векторів, координати яких — *змінні стану системи ринку* — відповідають динаміці цих акцій у визначені моменти часу:

I. одна послідовність утворюється з сукупності вхідних часових рядів — $\{\vec{V}_P(t)\}_{t=1}^M$, де координатами вектора стану $\vec{V}_P(t) = (P_1(t), P_2(t), \dots, P_K(t))$ є ціни цих K акцій у певний момент часу $t = \overline{1, M}$;

II. інша послідовність формується з сукупності похідних часових рядів — $\{\vec{V}_{ret_P}(t)\}_{t=1}^M$ з векторами стану $\vec{V}_{ret_P}(t) = (ret_P_1(t), ret_P_2(t), \dots, ret_P_K(t))$, координати яких є значеннями нормалізованих прибутковостей цих K акцій у певний момент часу $t = \overline{1, M}$.

Ці дві послідовності задають пару K -вимірних траєкторій станів системи. Взагалі-то можна побудувати кілька пар різних траєкторій різної розмірності K — все буде залежати від *набору акцій*, які вибираються дослідником для аналізу. Зокрема, можна обрати набір, що складається з усіх акцій індексного кошику або тільки з певної групи акцій (наприклад, із найбільшим денним обертом, з найвищою ринковою капіталізацією компаній чи з урахуванням галузевої приналежності тощо).

Етап 3. Дослідження рекурентності фазової траєкторії.

Дуже часто реальні економічні системи демонструють «рекурентну» поведінку, таку як періодичність або іррегулярну циклічність. Часто можна помітити, що економічна система, зокрема фінансовий ринок, зазнаючи зовнішніх впливів, проходить характерні етапи еволюції, дещо подібні до тих, що відбувалися з нею раніше. Якщо переосмислити з цієї точки зору, стане зрозумілим, що весь технічний аналіз фінансових ринків спирається на концепцію рекурентності.

На цьому етапі досліджуємо побудовані траєкторії на **рекурентність** (повторюваність) станів. Стани системи вважаються рекурентними, якщо відповідні точки фазового простору є «близькими», тобто попадають в деякий спільний ε -окіл.

Графічне зображення траєкторії у фазовому просторі могло б допомогти в дослідженні поведінки системи і в перевірці її на рекурентність. Проте, оскільки розмірність фазового простору складної системи, як правило, більше 3, графічне відображення траєкторії у нашому тривимірному світі є неможливим, а зрозуміло візуалізувати рекурентність за допомогою двох- або трьох-вимірних проекцій дуже складно. Тому потрібно вибрати інший спосіб, універсальніший. Skorистаємось з цієї метою *рекурентною діаграмою* [4].

Рекурентна діаграма (і відповідна **рекурентна матриця**) є зручним і зрозумілим відображенням d -вимірної фазової траєкторії станів системи завдовжки M на двовимірну матрицю $M \times M$, де обидві координатні осі є осями часу і будь-якій парі векторів станів (i, j) де $i, j = 1, \dots, M$, ставиться у відповідність елемент цієї матриці: пари рекурентних станів у рекурентній матриці позначаються значенням 1, а на рекурентній діаграмі відображаються чорними точками, пари нерекурентних станів — це 0 в матриці та біле відображення на діаграмі. Таке представлення фіксує інформацію про рекурентність у поведінці системи.

Спочатку обчислимо **матрицю відстаней** $\{\rho_{i,j}\}_{i,j=1}^M$, елементами якої будуть відстані між кожною парою (i, j) точок траєкторії (векторів станів):

$$\rho_{i,j} = \rho(\vec{V}(i), \vec{V}(j)) = \|\vec{V}(i) - \vec{V}(j)\|.$$

Позначимо вектор різниці $\vec{Z}$ і його координати:

$$\vec{Z} = \vec{V}(i) - \vec{V}(j) = \left(\underbrace{Y_1(i) - Y_1(j)}_{Z_1}, \underbrace{Y_2(i) - Y_2(j)}_{Z_2}, \dots, \underbrace{Y_d(i) - Y_d(j)}_{Z_d} \right),$$

а для обчислення відстані можна застосовувати різні норми, наприклад:

$$\text{«евклідова норма» } \|\vec{Z}\|_1 = \sqrt{\sum_{k=1}^d (Z_k)^2},$$

$$\text{«манхеттенська норма» } \|\vec{Z}\|_2 = \sum_{k=1}^d |Z_k|,$$

$$\text{«максимальна норма» } \|\vec{Z}\|_3 = \max_{k=1,\dots,d} |Z_k|.$$

Зауваження: При виборі норми необхідно зважати на те, що «максимальна норма» не залежить від розмірності простору. Це зручно, коли необхідно порівнювати *«реконструйовані траєкторії»* різних розмірностей вкладення. У цьому випадку такі матриці відстаней можуть порівнюватися напряму, тоді як для решти норм необхідно провести масштабування з урахуванням співвідношення використаних розмірностей вкладення. Але використання такої норми для *«траєкторії набору акцій»* може виявитись некоректним — якщо максимум буде знаходитися по одній і тій самій координаті (що відповідає певній акції), це нівелює значимість інших координат векторів станів (інших акцій з набору).

Зрозуміло, що ця *матриця відстаней* симетрична відносно головної діагоналі. Таку матрицю зручно візуалізувати у вигляді *кольорової карти взаємних відстаней*. Далі за зовнішнім виглядом карти необхідно вибрати ε — *поріг рекурентності*.

Матриця відстаней $\{\rho_{i,j}\}_{i,j=1}^M$ і обраний дослідником поріг рекурентності ε дозволяють легко побудувати *матрицю рекурентності* $\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^M$:

$$r_{i,j} = \theta(\varepsilon - \rho_{i,j}),$$

де $\theta(\cdot)$ — функція Хевісайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Матриця рекурентності також симетрична. Її чорно-біла візуалізація називається *рекурентною діаграмою*. Всі подальші розрахунки будуть проводитися за матрицею рекурентності, яку за необхідності легко продовжити, додаючи нові точки часових рядів.

На рис. 3 зображено рекурентні діаграми для фрагментів часових рядів індексу $djia$ та його нормалізованих прибутковостей за період часу з 03.01.2004 до 27.06.2016.

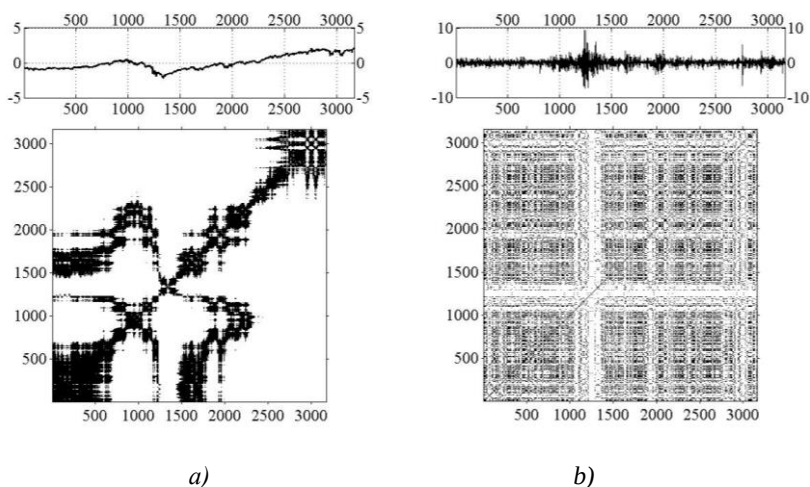


Рис. 3. Рекурентні діаграми для часових рядів фондового індексу $djia$ (a) та його нормалізованих прибутковостей (b) (03.01.2004 — 27.06.2016)

Етап 4. Розрахунок показників на підґрунті віконної технології.

Як і в попередніх наших дослідженнях [4–7], для аналізу часових рядів використовуємо «технологію ковзного вікна», що означає розрахунок будь-яких показників для вікна фіксованої ширини N (фрагменту часового періоду такої тривалості), що нібито «ковзає» по часовому ряду з фіксованим кроком S . Це дозволяє на виході отримувати часові ряди цих показників і, відповідно, вивчати динаміку поведінки показників у порівнянні з динамікою ринку (див. Етап 7).

На цьому етапі необхідно обрати значення, які ми присвоюємо параметрам N і S . Крок у жодному разі не може перевищувати ширину вікна — це має бути в багато разів менше число (зрозуміло, що чим воно менше, тим частіше дискретизовану у часі динаміку показників ми отримуємо, а значить більш плавну і деталізовану). Тому крок S вибираємо якомога меншим, але з урахуванням обчислювальних можливостей процесора, що застосо-

вується для проведення розрахунків. Під час пробних розрахунків використовуємо великі кроки, потім, за необхідності, уточнюємо розрахунки з маленьким кроком.

Параметри вікна зазвичай визначаються до початку розрахунків, виходячи з різних особистих міркувань дослідника, з урахуванням його попереднього досвіду і цілей аналізу. Тільки потім розраховуємо показники *для кожного окремого вікна* — тобто певного фрагменту часового ряду. Зауважимо, що якщо ми розглядаємо денні коливання акцій, то 250 точок часового ряду — це приблизно рік, 5 точок — тиждень, 20 — місяць, 60 — майже квартал.

Підкреслимо, що в цьому алгоритмі свідомо переносимо застосування ковзного вікна і вибір параметру N ширини вікна на етап, наступний після побудови рекурентної діаграми *для повної часової послідовності*, керуючись такими міркуваннями.

По-перше, зовнішній вигляд рекурентної діаграми підказує досвідченому досліднику, яку необхідно вибрати ширину вікна, щоб найефективніше використати закладену в діаграму інформацію. Більш того, аналізуючи попередню кольорову карту взаємних відстаней, можна адекватно корегувати вибір тандему параметрів — ширини вікна N і порогу рекурентності ε . Зазначимо, що ширина вікна повинна визначатися також з урахуванням «довжини пам'яті системи» про свою структуру.

По-друге, такий підхід прискорює розрахунки, оскільки для кожного окремого вікна не треба проводити повний перерахунок матриць відстаней і рекурентності — достатньо просто прибрати зайві «застарілі» S рядків і стовбців у матрицях і розрахувати додаткові нові рядки і стовбці, що відповідають новим S точкам фазової траєкторії. Тому зручно обчислити матриці для повної часової послідовності, а потім з неї вибирати підматриці, що відповідають вікнам. Отже, «одновимірному вікну» ширини N , ковзному по вхідних часових рядах, тепер відповідають «двовимірні віконця» — підматриці $N \times N$, що ковзають вздовж діагоналей матриць відстаней і рекурентності. Такі підматриці можна розглядати як окремі самостійні матриці відстаней і рекурентностей відповідних траєкторій довжини N , що є просто фрагментами заздалегідь побудованих матриць для повної траєкторії. Саме всередині таких «віконць» будемо надалі проводити аналіз і розраховувати різні статистичні міри.

До того, як перейти до викладення наступного етапу нашого алгоритму, зробимо невеличкий відступ і розглянемо деякі корисні показники, які можна розраховувати на основі вищепобудо-

ваних матриці відстаней і матриць рекурентностей з різними ε -порогами.

По-перше, за матрицею відстаней можна обчислити значення *кореляційного інтегралу*:

$$C(\varepsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \theta(\varepsilon - \rho_{i,j}).$$

Він є основою для розрахунку кореляційної розмірності аттрактора D_{Corr} (відомо, що $\ln C(\varepsilon) \propto D_{Corr} \ln \varepsilon$) і кореляційної ентропії аттрактора K_{Corr} , що є оцінками знизу для таких важливих характеристик аттрактора як *Хаусдорфова розмірність* і *Колмогорівська ентропія*, відповідно.

По-друге, за підматрицями рекурентності можна провести класичний *візуальний аналіз* і *кількісний аналіз рекурентних діаграм* [4, 5]. Візуальна оцінка діаграм може дати уявлення про поведінку траєкторії у певні періоди часу:

- при аналізі крупномасштабних структур досліджується *топология* діаграми, що дає загальне уявлення про характер процесу за цей період — стаціонарність, періодичність тощо;

- при ґрунтовному аналізі дрібномасштабних структур досліджується *текстура* діаграми, що дає інформацію про існування локальних явищ — паралельних витків траєкторії, ламінарних станів та ін.

Комбінації вертикальних і горизонтальних ліній формують прямокутні *кластери точок* (саме ці комбінації використовуються для обчислення мір *кількісного аналізу рекурентних діаграм*). Обчислення цих мір у підматрицях рекурентної діаграми показує їх поведінку у часі. Ряд мір обчислюється на основі підрахунку *густини* рекурентних точок і побудови частотного розподілу довжин діагональних ліній: *RR* — коефіцієнт самоподібності, *DET* — показник детермінованості (передбачуваності), *DIV* — дивергенція, зворотна величина максимальної довжини діагональної лінії, *ENTR* — ентропія і *TREND* — тренд. Деякі дослідження даних мір показали, що їх застосування може сприяти виявленню точок біфуркації, переходів «хаос — порядок». Інші міри, що використовують густину вертикальних або горизонтальних структур, такі як *LAM* — ламінарність і *TT* — показник затримки, дозволяють виявляти переходи «хаос — хаос». Слід зазначити також нечутливість цих мір до вимог стаціонарності та довжини досліджуваних часових рядів [4].

На рис. 4 наведено динаміку розрахованих віконних мір детермінованості DET для часового ряду індексу $djia$ та окремо для часового ряду його нормалізованих прибутковостей для вікна шириною в 250 днів і з кроком в 1 день (в обох випадках суміщену з динамікою фондового індексу $djia$).

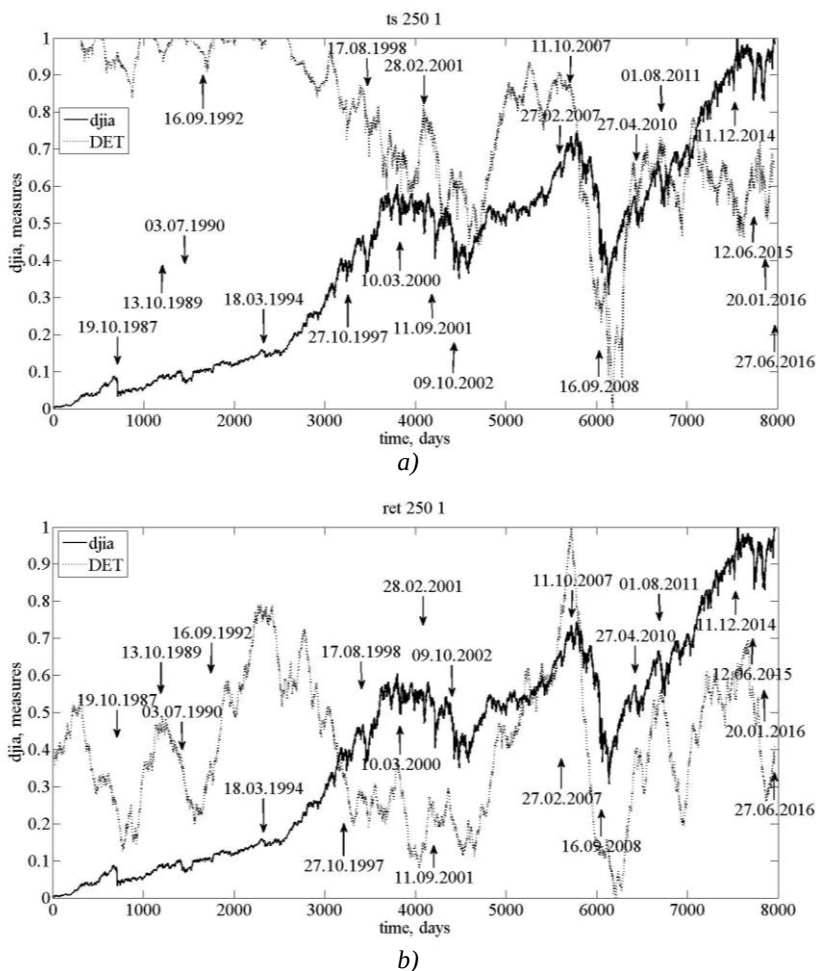


Рис. 4. Міри детермінованості DET для часового ряду індексу $djia$ — ts (a) та для часового ряду його нормалізованих прибутковостей ret (b), що розраховані з параметрами $N = 250, S = 1$

Етап 5. Побудова мережі за матрицею рекурентності.

На основі матриці рекурентності будується складна мережа, що являє собою граф G , який складається з певного набору N вершин, поєднаних ребрами. Якщо пара вершин поєднані ребром, то вони називаються *суміжними*. Матриця суміжності графа — це матриця A розміром $N \times N$, в якій кожній парі вершин (i, j) ставиться у відповідність елемент i -ого рядка j -ого стовбця, що дорівнює одиниці, якщо між цими вершинами є ребро, і нулю — якщо немає ребра. У теорії мереж вершини називають вузлами, а ребра — зв'язками або дугами.

Для кожного окремого вікна побудуємо мережу таким чином. Поставимо у відповідність кожній точці фазової траєкторії (стан системи в певний момент часу) вузол мережі. Вузли з'єднаємо дугами, якщо відповідні стани рекурентні. Тобто матриця суміжності мережі дорівнює матриці рекурентності, тільки необхідно замінити діагональ — замість 1 поставити 0, щоб в графі не було петель. Така мережа називається ε -рекурентною [3].

Зауваження: Альтернативні підходи до принципу встановлення зв'язків між вузлами-станами дозволяють побудувати інші різновиди рекурентних мереж — мережу найближчих сусідів та адаптивну мережу [3]. З матриці відстаней можна побудувати матрицю найближчих сусідів, коли з кожної вершини виходять направлені ребра до фіксованої кількості найближчих сусідів. Таким чином фіксується розподіл вихідних зв'язків вершин, а розподіл вхідних має деяку варіацію. Подібна матриця суміжності вже не буде симетричною. Однак, слід зазначити, що інтерпретувати властивості направленої мережі складніше, ніж ненаправленої. Адаптивна мережа — ненаправлена, при цьому зберігається умова постійної кількості ребер для кожної вершини. Така мережа будується ітеративно.

Оскільки рекурентні мережі будуються для послідовності вікон, то можна говорити про інтерпретацію еволюції траєкторії розвитку системи за певний період часу довжиною N у вигляді динамічного графа з N вершинами — точками траєкторії. Зсув вікна на крок S додає нові S точок траєкторії і видаляє стільки ж найстаріших точок, що вже стають неістотними.

Але мережа — це не просто можливість красивої візуалізації рекурентності у системі. В даному випадку мережа — це інструмент *представлення* еволюції станів системи, що дозволяє дослідити *структурну організацію* часової послідовності станів у цілому, за допомогою спостереження топологічних властивостей

відповідно побудованої мережі. Ефективність застосування такого підходу до аналізу часової послідовності (еволюції траєкторії) обумовлена можливістю застосування потужного математичного апарату, що вже розроблений у рамках теорії графів. Цей апарат включає комплекс різноманітних мір, що дозволяють кількісно оцінити широкий перелік властивостей складних мереж.

Якщо порівнювати ці нові міри, розраховані для ε -рекурентної мережі, з тими, що розраховуються в рамках *кількісного аналізу рекурентних діаграм*, то мережні міри дають детальніший статистичний опис топологічних властивостей траєкторії системи. Тобто, дослідники отримують новий перспективний інструмент аналізу часових послідовностей, що дозволяє видобувати концептуально нову корисну інформацію щодо закономірностей, закладених у високоорганізованих часових послідовностях.

Етап 6. Розрахунок комплексу мережних характеристик.

Для кожного побудованого графа, що відповідає певному вікну з загальної послідовності вікон, розрахуємо повний комплекс різноманітних мережних характеристик.

Для аналізу мережі досліджують характеристики окремих вузлів (локальні), характеристики мережі в цілому (глобальні) та характеристики мережних підструктур. Числові показники деяких глобальних характеристик мережі можуть бути представлені у вигляді аналітичних узагальнень її локальних характеристик (наприклад — найменше, найбільше, середнє значення локального показника, взятого за усіма вузлами). Окрім того, що глобальна характеристика може бути представлена у формі одного числа, це також може бути представлення у вигляді розподілу значень локальної характеристики вузлів по усій мережі. Наведемо основні мережні поняття і характеристики [8], які використовуємо у наших дослідженнях.

Число вузлів у мережі N називається *розміром мережі*.

Шлях — це послідовність суміжних вузлів і зв'язків між ними, коли вузли не повторюються. *Цикл* — це шлях, у якому початковий і кінцевий вузол співпадають.

Довжина кожного із зв'язків між *суміжними вузлами* (з'єднаними ребром) вважається рівною одиниці. *Відстанню* $\delta(i, j)$ між парою вузлів (i, j) є довжина найкоротшого шляху між ними у мережі (або шляхів, бо взагалі-то їх може бути і кілька). Такий шлях називається *геодезичною лінією*.

Середнє значення міжвузлової відстані серед всіх тих пар вузлів (i, j) , між якими існує хоча б один з'єднуючий їх шлях (адже мережа може мати і нез'єднані між собою вузли), називається **середній найкоротший шлях**:

$$APLen(G) = \delta_{avg} = \langle \delta(i, j) \rangle_{i, j}.$$

Максимальна міжвузлова відстань називається **діаметром мережі** G :

$$diam(G) = \delta_{max} = \max_{i, j} \delta(i, j).$$

Середній найкоротший шлях і діаметр мережі є глобальними характеристиками мережі. Важливу інформацію про *архітектуру* мережі можна отримати шляхом вивчення залежностей середньої або максимальної міжвузлової відстані від розміру мережі.

Число зв'язків вузла називається **ступенем вузла** $\alpha(i)$. Поняття ступеня — локальна характеристика графа. З неї отримуємо наступні глобальні характеристики мережі.

Середня ступінь вершин:

$$\alpha_{avg}(G) = \langle \alpha(i) \rangle_i.$$

Максимальна ступінь вершин:

$$\alpha_{max}(G) = \max_i \langle \alpha(i) \rangle.$$

Розподіл ступенів вершин $P^\alpha(n)$ показує ймовірність того, що навмання вибрана вершина буде мати ступінь n :

$$P^\alpha(n) = P\{\alpha(i) = n\} = \frac{\eta_n}{N},$$

де η_n — кількість вершин у мережі зі ступенем n .

Розподіл ступенів вершин є найпростішою статистичною характеристикою мережі. При цьому, в багатьох випадках вивчення саме цієї характеристики (зокрема, визначення *виду розподілу* ступенів вершин) є найінформативнішим щодо розуміння фундаментальних властивостей мережі і процесів, що в ній відбуваються.

Кластеризація вузла — це локальна характеристика мережі. Вона характеризує ступінь взаємозв'язку між собою найближчих сусідів даного вузла. Коефіцієнт кластеризації (або кластерності)

даного вузла показує ймовірність того, що навмання обрані два її найближчих сусіда самі виявляються найближчими сусідами. Якщо усі найближчі сусіди вузла взаємопов'язані, то коефіцієнт кластеризації дорівнює 1, якщо ж зв'язків між ними немає, то дорівнює 0. Розраховується за співвідношенням:

$$clust(i) = \frac{\Delta(i)}{\alpha(i)(\alpha(i)-1)/2}.$$

У чисельнику число $\Delta(i)$ — кількість трикутників (циклів довжини 3), приєднаних до цього вузла, а в знаменнику $\alpha(i)(\alpha(i)-1)/2$ — їх максимальна можлива кількість.

Кластеризація мережі, що є глобальною характеристикою, визначається як середнє значення кластеризації по всіх вузлах:

$$clust(G) = clust_{avg} = \langle clust(i) \rangle_i.$$

Таким чином, кластеризація мережі характеризує статистику циклів, а саме, трикутників у мережі. Зазвичай реальні мережі характеризуються високою кластеризацією.

Навантаження вузла (інакше називають *посередництво* — англ. betweenness) характеризує роль вузла у встановленні зв'язків у мережі — показує відносну кількість найкоротших шляхів, що проходять через даний вузол:

$$\beta(i) = \sum_{j,k} \frac{\gamma_{j,k}(i)}{\gamma_{j,k}},$$

де $\gamma_{j,k}(i)$ — кількість найкоротших шляхів, що з'єднують вузли j та k і проходять через даний вузол i ($j \neq i, k \neq i$), $\gamma_{j,k}$ — загальна кількість найкоротших шляхів, що з'єднують вузли j та k ($j \neq i, k \neq i$).

На відміну від ступеня вузла (що для окремої вершини враховує тільки її власні зв'язки з сусідніми вершинами) і кластеризації вузла (що для окремої вершини враховує взаємозв'язки тільки її найближчих сусідів), поняття посередництва вузла відбиває топологію усієї мережі (тобто, для окремої вершини враховує всі шляхи взаємозв'язків між кожною парою вузлів).

Якщо граф зв'язний, то даний вузол поєднаний з усіма іншими вузлами. Тоді відстанями від вузла i до решти вузлів мережі $\forall j \neq i$ будуть довжини найкоротших шляхів $\delta(i, j)$.

Ексцентриситет вузла — це максимальна з цих відстаней:

$$\chi(i) = \max_{j \neq i} \delta(i, j) .$$

Віддаленість вузла — це сума всіх цих відстаней:

$$\phi(i) = \sum_{j \neq i} \delta(i, j) .$$

Близькість вузла визначається як обернена віддаленість:

$$\psi(i) = 1 / \phi(i) .$$

Показник ступеня вершини, показник близькості вершини до всіх інших вершин і показник посередництва вершини у поєднанні всіх пар решти вершин є різновидами такої характеристики вузла як **центральність**, що означає важливість вузла в мережі в деякому конкретному сенсі.

Це найважливіші локальні характеристики мережі. Зрозуміло, існують й інші.

У рамках наших досліджень складності сучасних фондових ринків деякі із зазначених *глобальних топологічних характеристик* мереж, розрахованих за такою методологією, розглядаються нами як міри динамічної складності ринку.

Сукупність значень будь-якої *локальної характеристики*, впорядковані так само, як вершини мережі, що відображають стани системи у часі, представляє собою дуже цікаву структуру, що потребує окремих досліджень. Зокрема, нами проводилися розрахунки ентропійних і мультифрактальних показників для сукупностей ступенів вузлів. У результаті було отримано висновок, що динаміка подібних показників, розрахованих для ковзних вікон, теж має певні специфічні закономірності, що дозволяє інтерпретувати їх у якості мір динамічної складності ринку.

На рис. 5 наведено суміщену з динамікою фондового індексу дїя динаміку двох мережних *глобальних топологічних мір складності*: коефіцієнту кластеризації *clust* і середнього найкоротшого шляху *APLen*, розрахованих для рекурентних мереж, побудованих з часового ряду нормалізованих прибутковостей. Ці міри у періоди кризових явищ поведуть себе характерним чином, але антисиметрично: якщо коефіцієнт кластеризації у випадку криз зростає, то середній найкоротший шлях помітно зменшується.

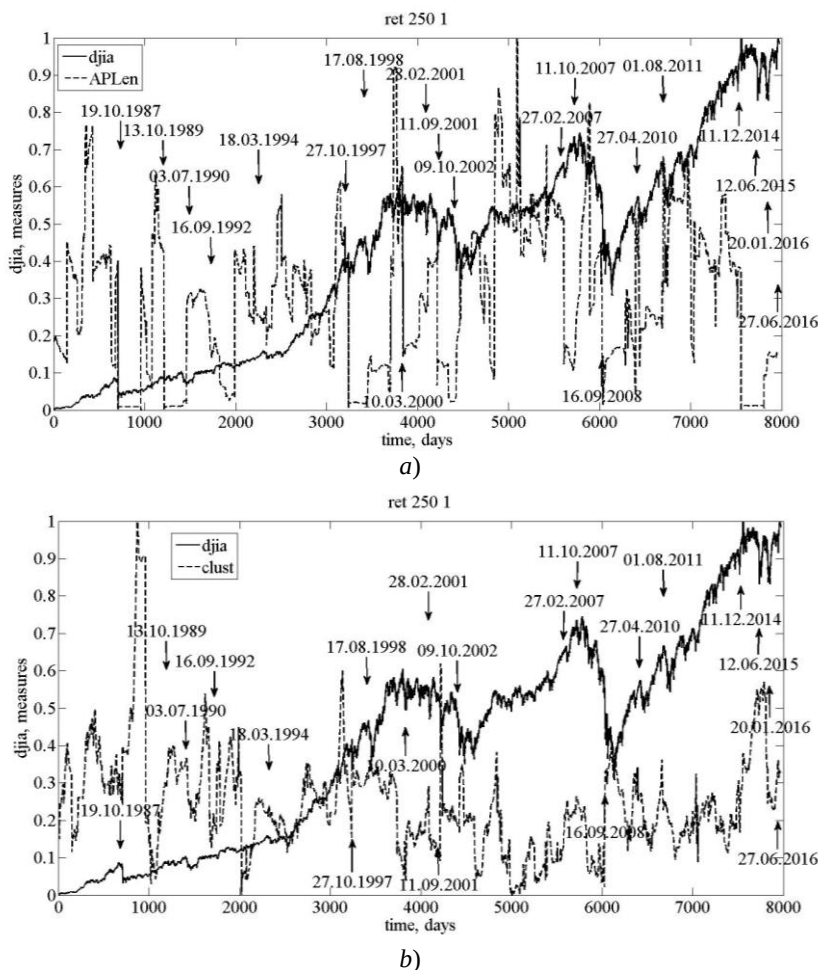


Рис. 5. Глобальні топологічні міри складності рекурентних мереж, побудованих з часового ряду нормалізованих прибутковостей ret: середній найкоротший шлях *APLen* (a) і коефіцієнт кластеризації *clust* (b)

Паралельно розраховуємо *спектральні характеристики* мережі, які також розглядаються в якості мір динамічної складності ринку.

Спектральна теорія графів базується на алгебраїчних інваріантах графа — його спектрах. Спектром *графа* G називається мно-

жина власних значень *матриці суміжності* A , що відповідає даному графу.

Для заданої матриці A детермінант вигляду $|\lambda E - A|$, де E — одинична матриця, є многочленом від λ , який називається *характеристичним многочленом матриці* A . Власні значення матриці A є нулями цього характеристичного многочлену. Власні значення матриці A задовольняють рівності $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, де $\vec{v}$ — ненульовий вектор. Вектори $\vec{v}$, що задовольняють цій рівності, називаються *власними векторами матриці* A , що відповідають власним значенням. Множина всіх власних значень матриці A називається *спектром матриці* A .

Характеристичним многочленом графа G називається відповідний характеристичний многочлен його матриці суміжності A :

$$\Phi_G(\lambda) = |\lambda E - A|.$$

Власними значеннями графа λ_j і *власними векторами графа* $\vec{v}_j$ називаються відповідні власні значення і власні вектори його матриці суміжності A .

Спектр графа G — це спектр його матриці суміжності A :

$$\text{Spectr}(G) = \{\lambda_j\}_{j=1}^N.$$

Найменше із додатних власних значень називається *індексом алгебраїчної зв'язності* (англ. algebraic connectivity) графа:

$$\text{alg conn}(G) = \min\{\lambda_j > 0\}.$$

Ця величина відображає «силу» зв'язності компонент графа та використовується при аналізі надійності та синхронізації графа.

Важливими похідними характеристиками мережі є спектральний розрив, енергія графа, спектральні моменти і спектральний радіус.

Спектральний розрив (англ. spectral gap) є різницею між найбільшим λ_1 і наступним λ_2 власними значеннями матриці суміжності і характеризує швидкість повернення системи до рівноважного стану:

$$\text{gap}(G) = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Енергія графа (англ. graph energy) — це сума модулів власних значень матриці суміжності графа:

$$Enrg(G) = \sum_{j=1}^N |\lambda_j|.$$

Спектральний радіус (англ. spectral radius) є найбільшим по модулю власним значенням матриці суміжності.

$$sp\ rad(G) = \max_j |\lambda_j|.$$

k -й спектральний момент (англ. spectral moment) матриці суміжності визначається виразом:

$$m_k(A) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \lambda_j^k.$$

Ще одним розповсюдженим видом спектру графа є спектр, отриманий із матриці Лапласа L .

Матриця Лапласа $L = D - A$, де D — діагональна матриця $N \times N$:

$$d_{ij} = \begin{cases} \alpha(i), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

де $\alpha(i)$ — ступінь i -ої вершини графа.

На рис. 6 за аналогією з топологічними, представленими на рис. 5, наведено пару мережних *спектральних мір складності*: алгебраїчної зв'язності *alg conn* та спектрального розриву *gap*. При цьому перша міра розрахована для рекурентних мереж, побудованих з часового ряду фондового індексу djia, тоді як друга — для рекурентних мереж, побудованих з часового ряду нормалізованих прибутковостей.

Крім зазначеного вище комплексу мережних показників, граф може визначатись набором *якісних* характеристик:

- простий граф — граф, що не містить кратних дуг і петель. За способом побудови використовувані рекурентні мережі завжди виявляються простими;

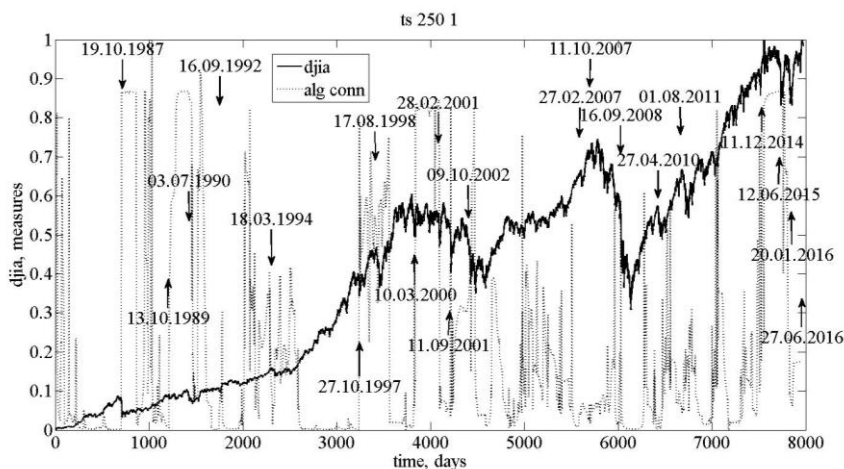
- зв'язний граф — граф, в якому між будь-якою парою вершин існує хоча б один шлях;

- регулярний граф — граф, ступені вершин якого рівні;

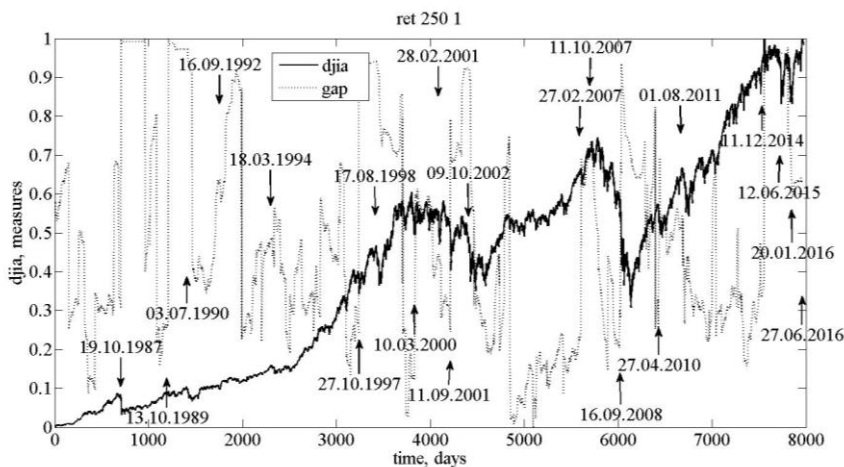
- повний граф — простий граф, у якому кожна пара вершин суміжна;

- ейлерів граф — граф, що містить ейлеровий цикл (замкнений шлях, що проходить по всім ребрам графа, причому тільки один раз);

• дерево — зв'язний ациклічний граф. Число вузлів N і число зв'язків U співвідносяться як $N = U - 1$.



a)



b)

Рис. 6. Спектральні міри складності для рекурентних мереж, побудованих з часового ряду ts індексу $djia$ — міра $alg\ conn$ (a) та з часового ряду його нормалізованих прибутковостей ret — міра gap (b)

Етап 7. Співставлення динаміки розрахованих показників і динаміки індексу. Пошук індикаторів, передвісників.

У результаті виконання попередніх етапів отримуємо *часові ряди* різноманітних мережних показників, причому одна точка такого часового ряду відповідає окремому вікну. Довжина таких рядів (дорівнює кількості вікон) залежить від довжини початкового ряду M , ширини вікна N і кроку S :

$$W = [(M - N) / S] + 1.$$

Вивчення динаміки різноманітних мережних показників дозволяє виявляти приховані закономірності в структурній організації досліджуваних часових послідовностей, відповідно робити висновки про еволюцію поведінки системи, що продукує ці часові послідовності. Таким чином, застосування технології ковзного вікна для розрахунку спектральних і топологічних характеристик складних мереж дає надзвичайно корисну інформацію для аналізу часових рядів, на основі яких ці мережі сконструйовано. Важливим для задач дослідження є візуальний аналіз накладених графіків динаміки часового ряду індексу (інтегральної характеристики ринку) і динаміки побудованих рядів мережних показників, обчислюваних для вікон.

При такому візуальному аналізі необхідно звертати увагу на характерні особливості поведінки досліджуваної мережної характеристики у порівнянні з динамікою аналізованого фінансового показника. Наприклад, можна помітити реакції розрахованої характеристики мережі на кризи або підйоми ринку, причому ці реакції можуть бути не тільки з деякою затримкою у часі або своєчасними, а й випереджаючими. Виявлена закономірність дозволяє вже розглядати дану характеристику мережі як *індикатор* відповідної ситуації на ринку, а у разі випереджаючої реакції — як *передвісник* [5—7].

Виявлені закономірності поведінки рекурентних мереж для деяких ринків дають можливість сформулювати гіпотезу про універсальний характер такої закономірності.

При перевірці гіпотези для інших ринків або часових інтервалів слід враховувати можливу необхідність коригування вхідних

параметрів для розрахунку спектральних і топологічних характеристик складних мереж, у тому числі параметрів ширини вікна і кроку, адже ринки різного рівня розвитку демонструють «різний плин часу».

Наприкінці акцентуємо увагу на концептуальній подібності між конструюванням мережної топологічної структури з високо-організованих часових послідовностей і дослідженням властивостей фазового простору динамічної системи, що базуються на вивченні сукупності окремих часових рядів. Конструювання динамічних мереж із часових рядів з подальшим розрахунком комплексу специфічних топологічних властивостей є новим перспективним напрямком в аналізі часових рядів. У той же час можна вважати вже традиційним дослідження фундаментальних характеристик складної динамічної системи за рахунок аналізу часових рядів, що продукуються цією системою. Найважливішим у цьому виявляється належна побудова моделі досліджуваної складної системи навколо спостережуваних часових рядів.

Ідея інтерпретації матриці рекурентності фазового простору системи фондового ринку як матриці суміжності для побудови складної динамічної мережі з часових рядів коливань курсів акцій, виявилася дуже продуктивною для пошуку нових адекватних мір динамічної складності ринку, які, по суті, є показниками різних проявів високої структурної організації фінансових часових рядів.

Література

1. *Focus. Complex Networks in Finance* // *Nature Physics*. — 2013. — Vol. 9. — No. 3. — P. 119—197.
2. Соловійов В. М. Прогнозування кризових явищ в складних мережах / В. М. Соловійов, В. В. Соловійова, Д. М. Чабаненко // *Сучасні концепції прогнозування розвитку складних соціально-економічних систем: кол. монографія*. — Бердянськ : Ткачук О. В., 2013. — С. 190—206.
3. *Donner R. V. Recurrence-based time series analysis by means of complex network methods* / R. V. Donner, M. Small, J. F. Donges,

N. Marwan, Y. Zou, R. Xiang, J. Kurths // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2011. — Vol. 21. — No. 4. — P. 1019—1046.

4. *Дербенцев В. Д.* Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем: Монографія / В. Д. Дербенцев, О. А. Сердюк, В. М. Соловйов, О. Д. Шаропов. — Черкаси: Брама-Україна, 2010. — 300 с.

5. *Соловйов В. М.* Рекурентні міри як метод кількісної оцінки складності / В. М. Соловйов, А. В. Батир // *Вісник КНУТД*. — 2012. — № 5. — С. 254—257.

6. *Соловьева В. В.* Использование мультифракталов в анализе фондовых рынков / В. В. Соловьева, А. Ш. Тулякова // *Інформаційні технології та моделювання в економіці: на шляху до міждисциплінарності*: кол. монографія. — Черкаси: Брама-Україна, 2013. — С. 116—130.

7. *Соловйов В. М.* Методологія дослідження динамічної складності фондових ринків з використанням рекурентних мереж / В. М. Соловйов, А. Ш. Тулякова // *Проблеми моніторингу, моделювання та менеджменту емерджентної економіки*: кол. монографія. — Черкаси : Брама-Україна, 2013. — С. 91—111.

8. *Евин И. А.* Введение в теорию сложных сетей / И. А. Евин // *Математические основы и численные методы моделирования*. — 2010. — Т. 2. — № 2. — С. 121—141.

References

1. Focus. (2013). Complex networks in finance. *Nature Physics*, 9(3), 119—197. Retrieved from <http://www.nature.com/nphys/journal/v9/n3/index.html>.

2. Soloviev, V. M., Solovieva, V. V., & Chabanenko, D. M. (2013). Prohnozuvannia kryzovykh yavlyshch v skladnykh merezhakh. In *Suchasni kontseptsii prohnozuvannia rozvytku skladnykh sotsialno-ekonomichnykh system*. (pp. 190—206). Berdyansk, Ukraine: Tkachuk O. V. [in Ukrainian].

3. Donner, R. V., Small, M., Donges, J. F., Marwan, N., Zou, Y., Xiang, R., & Kurths, J. (2010). Recurrence-based time series analysis by means of complex network methods. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1019—1046. doi: 10.1142/S0218127411029021

4. Derbentsev, V. D., Serdiuk, O. A., Soloviev, V. M., & Sharapov, O. D. (2010). *Synerhetychni ta ekonofizychni metody doslidzhennia dynamichnykh ta strukturnykh kharakterystyk ekonomichnykh system*. Cherkasy, Ukraine: Brama-Ukraina [in Ukrainian].

5. Soloviev, V. M., & Batyr, A. V. (2012). Rekurentni miry yak metod kil'kisnoi otsinky skladnosti. *Visnyk KNUTD (KNUTD Herald)*, 5, 254—257 [in Ukrainian].

6. Solovieva, V. V., & Tuliakova, A. Sh. (2013). Ispol'zovanie multifraktalov v analize fondovykh rynkov. In *Informatsiini tekhnologii ta modeliuvannia v ekonomitsi: na shliakhu do mizhdystsypynarnosti*. (pp. 116—130). Cherkasy, Ukraine: Brama-Ukraina [in Russian].

7. Soloviev, V. M., & Tuliakova, A. Sh. (2013). Metodolohiia doslidzhennia dynamichnoi skladnosti fondovykh rynkiv z vykorystanniam rekurentnykh merezh. In *Problemy monitorynhu, modeliuvannia ta menedzhmentu emerdzhentnoi ekonomiky*. (pp. 91—111). Cherkasy, Ukraine: Brama-Ukraina [in Ukrainian].

8. Evin, I. A. (2010). Vvedenie v teoriyu slozhnykh setey. *Matematicheskie osnovy i chislennyye metody modelirovaniya (Mathematical foundations and numerical modeling techniques)*, 2(2), 121—141 [in Russian].

Стаття надійшла до редакції 17.05.2016